

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ИНДУСОВЪ.

Друшарнаго Профессора Императорскаго Университета Св. Владимира

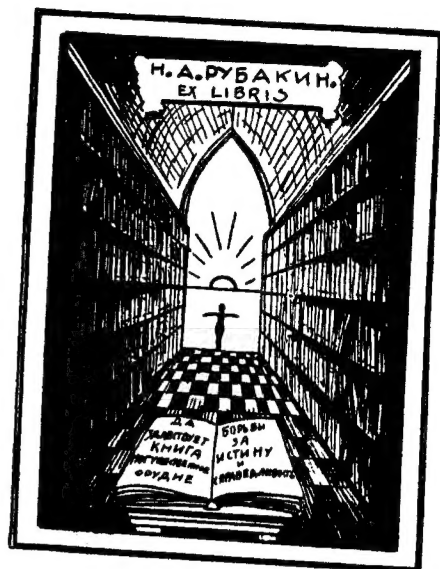
М. Е. Ващенко-Захарченко.



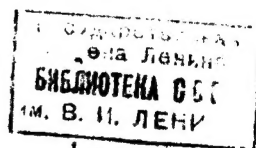
КІЕВЪ

Въ типографіи Императорскаго Университета Св. Владимира.

1882.



Печатано по опредѣленію Совѣта Университета Св. Владиміра.
Ректоръ Н. Газмановъ.



22

138

Первыя изслѣдованія по исторіи развитія математическихъ наукъ у индусовъ были сдѣланы въ концѣ прошлаго столѣтія французскимъ астрономомъ Бальи, который высказалъ мнѣніе, что науки у индусовъ находились на очень высокой степени развитія и совершенства. По его словамъ, уже въ глубокой древности индусамъ было извѣстно все то, чѣмъ впоследствии занимались Гиппархъ, Птоломей и Ньютонъ; познанія свои индусы унаслѣдовали отъ какого-то древняго народа, отъ котораго не осталось никакихъ памятниковъ. Другіе ученые были совершенно противнаго мнѣнія и полагали, что у индусовъ самостоятельнаго развитія наукъ не существовало и что все извѣстное имъ они заимствовали въ X вѣкѣ у арабовъ.

Знаменитый Кольбрукъ былъ однимъ изъ первыхъ, положившихъ прочныя основы изученію сочиненій, написанныхъ индусами по математикѣ. Онъ былъ первый начавшій изучать сочиненія эти въ подлинникахъ—на санскритскомъ языкѣ. Особенное вниманіе имъ было обращено на сочиненія Брамагупты и Баскары, писателей жившихъ въ VII и XI вѣкахъ. Въ 1817 г. появилось его замѣчательное сочиненіе: „Algebra with Arithmetic and Mensuration etc.“, которое пролило совершенно иной свѣтъ на все извѣстное до того времени объ индусской математикѣ. Сочиненіе это до настоящаго времени не утратило значенія. Къ сожалѣнію на сочиненія Кольбрука и нѣкоторыхъ другихъ ученыхъ, писавшихъ также объ математикѣ индусовъ, не было обращено должнаго вниманія, пока Шаль въ одной изъ главъ своего „Aperçu historique“ не коснулся этого вопроса и тѣмъ вывелъ сочиненіе Кольбрука изъ забвенія.

Послѣ изслѣдованій Кольбрука и Шалья вопросъ о развитіи математическихъ наукъ у индусовъ не подвигался впередъ и только въ послѣдніе годы снова на этотъ предметъ было обращено должное вниманіе. Изслѣдованія послѣдняго времени показали, что сочиненія Брамагупты и Баскары относятся къ сравнительно позднему времени и что уже за нѣсколько столѣтій до нихъ существовали математическія сочиненія. Къ числу такихъ сочиненій принадлежитъ „Ариабаттѣямъ“, написанное въ VI в. по Р. Х.

Ариабгаттой. Санскритскій текстъ этого сочиненія былъ изданъ въ 1874 г. профессоромъ Лейденскаго университета Керномъ; нѣкоторыя части этого сочиненія переведены и комментированы французскимъ ученымъ Роде. Къ числу древнѣйшихъ санскритскихъ математическихъ сочиненій принадлежатъ сборники правилъ для построения жертвенниковъ. Сочиненія эти извѣстны подъ именемъ „Сулвасутръ“ или „Правилъ веревки“. Въ настоящее время изданы Тибо три такихъ сборника.

Особенно много обязана наука членамъ „Азіатскаго Общества“ въ Калькуттѣ, которые занимаются собираніемъ и разработкой различныхъ санскритскихъ сочиненій. Къ числу членовъ этого общества принадлежалъ также Кольбрукъ. Въ настоящее время за изученіе, сохранившихся древнихъ санскритскихъ сочиненій, принялись также туземные ученые.

Въ предлагаемомъ очеркѣ мы старались на сколько возможно кратко, въ общихъ чертахъ, представить все извѣстное въ настоящее время объ математическихъ познаніяхъ индусовъ и познакомить интересующихся съ содержаніемъ, дошедшихъ до насъ сочиненій математическаго содержанія, написанныхъ на санскритскомъ языкѣ. Особенное вниманіе мы обратили на методы и приемы, употребляемые индусскими учеными и указали на ихъ характеристическія особенности.

Настоящая статья есть глава изъ печатаемаго нами сочиненія: „Историческій очеркъ развитія Геометріи отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени“. Всѣ ссылки въ скобкахъ въ настоящей статьѣ относятся къ этому сочиненію.

М. Ващенко-Захарченко.

Кіевъ,
въ Сентябрѣ 1881 г.

Въ началѣ нашего Очерка мы указали на особенности, представляемыя Геометріей индусовъ и упомянули, что они достигли высокаго развитія въ Алгебрѣ и Ариметикѣ; въ настоящее время мы коснемся этого вопроса обстоятельнѣе, указавъ чего именно достигли индусы въ этихъ наукахъ.

Благодатный климатъ страны, необыкновенное плодородіе почвы, изобиліе естественныхъ произведеній, все это имѣло громадное вліяніе на умственное развитіе и міровоззрѣніи индусовъ. Созерцаніе величественной природы способствовало совершенно иному взгляду на міръ и на все окружающее, и всего яснѣе и опредѣленнѣе отразилось на ихъ умственномъ мышленіи, которое получило то отличительное направленіе и характеръ о которомъ мы говорили выше.

Взглядъ индусовъ на внѣшній міръ былъ гораздо шире и величественнѣе, чѣмъ воззрѣніи древнихъ грековъ. Въ своей философіи они достигли того, что отъ разсмотрѣнія тѣлъ природы они перешли къ представленіямъ о безконечномъ, безграничномъ, безформенномъ, вѣчномъ; на міръ они стали смотрѣть какъ на нѣчто превратное, проходящее; представленіе о формѣ и видѣ уступило мѣсто понятіямъ о веществѣ и божественномъ началѣ. Подобныя воззрѣнія отразились и въ математикѣ индусовъ. Тоже самое имѣло мѣсто и у древнихъ грековъ, которые исходя изъ своихъ воззрѣній, искали дѣйствительно существующее, стремились узнать, на сколько необходимо, все окружающее. Индусы же напротивъ, изслѣдуя создавали формы и довольствовались найти, что нѣчто существуетъ ни сколько не заботясь каково оно на самомъ дѣлѣ. Оба эти направленія были слишкомъ односторонни, но вмѣстѣ съ тѣмъ необходимы. Связи этихъ двухъ направленій новѣйшая математика обязана своимъ быстрымъ развитіемъ. Въ то время когда греки ставили все въ зависимость отъ формы, такъ что даже чисто арифметическія предложенія получали геометрический характеръ,

индусы обращали внимание на один только числа и Геометрия их составляла часть арифметики.

Влияние окружающей природы лучше всего отразилось на религиозных воззрениях и космогонии древних индусов *). В этом направлении они представляют поразительную противоположность с понятиями древних греков на те же предметы. Индусы представляли себя своих богов под самыми странными и страшными образами, они являются у них большею частью в вид: карликов, великанов, слонов, черепах и различных чудовищ; например Шиву они изображали с тремя глазами, с черепом в руках, он носит ожерелье из человеческих костей и опоясан змеями. Жена его имеет четыре руки, цвет ее темно-синий и т. п. Подвиги, сделанные богами индусов самые невероятные и необыкновенные. Боги эти возскают в различных этажах неба, живут десятки и сотни миллионов лет, число их доходит до 330 миллионов. Во всех своих понятиях индусы безграничны, всему сколько нибудь важному они приписывают самую глубокую древность, так например по их мнению законы Ману написаны за 2 000 000 000 лет, между тем как известно что законы эти составлены не более как за 3000 лет. Индусы так часто приобретают к употреблению огромных чисел, что у них даже существует особое название *азанка* для обозначения единицы сопровождаемой 60-ю нулями.

У греков, мы видим, совершенно противоположное, боги их напоминают собою обыкновенных людей, не только по своему внешнему виду, но и по характеру и действиям.

Не смотря на то, что индусы приписывают своей науке самую глубокую древность, но относительно этого вопроса положительных указаний не существует **). Самый древний из известных нам в настоящее время математиков индусов есть *Ариабатта*, живший в V в. по Р. Х., он написал сочинение астрономического содержания, под заглавием „*Ариабат-*

*) Влияние природы на умственную деятельность человека прекрасно изображено у Бока, в его сочинении „История цивилизации в Англии“, в главе: Влияние законов природы на устройство общества и характер отдельных лиц (Т. I, Гл. II).

**) По словам арабского писателя X-го века Масуди у индусов уже в глубокой древности процветали науки. Значительный шаг вперед он сделали во время царя Браммы, когда в храмах были поставлены изображения небесных глобусов, составлены правила астрологии, изучено влияние звезд на человека и животных; в это же время были составлены: *Система*, т. е. книга времени, астрономические таблицы, а также изобретены девять знаков, при помощи которых индусы производят свои вычисления. Масуди также утверждает, что „Алмагест“ написан индусами, и что Птоломей из него заимствовал содержание своего сочинения.

тата“. Из содержания этого сочинения можно заключить, что Ариабатта был только собирателем и толкователем найденного уже до него другими. Обратив внимание на методы и приемы употребленные им, о которых мы скажем ниже, необходимо предположить, что до того состояния и развития в котором находились математические науки во время Ариабатты прошел не малый промежуток времени. Такое предположение еще тем вероятнее, что нам известны математические сочинения халдеев и египтян, написанные более чем за 2000 л. до Р. Х., и несправедливо было бы предполагать, что индусы отстали от них. Но во всяком случае древность, приписываемая индусскими учеными своим наукам, весьма далека от действительности. Подобная древность могла быть только создана фантазией человека тропических стран *).

*) Пристрастие индусов к употреблению больших чисел отразилось в их космогонии и религиозных верованиях. Вся космогония индусов основана на мифологических воззрениях. Продолжительность всего вещественного мира они делят на четыре большие периоды или века, названные ими *yugas*. Периоды эти выражаются в солнечных годах. Периоды эти следуют один за другим в следующем порядке и заключают каждый известное число лет:

1-й период <i>Satya-yuga</i> (золотой век)	1 728 000
2-й период <i>Tretā-yuga</i> (серебряный век)	1 296 000
3-й период <i>Drāpara-yuga</i> (бронзовый век)	864 000
4-й период <i>Kali-yuga</i> (железный век)	432 000

Полная сумма составляет *mahā-yuga* (большая юга) 4 320 000

В последней юге мы живем. Число 4320000 умноженное на 1000 составляет новый период, известный под именем *kalpa*—это время протекшее от сотворения всего мира. В сочинении астрономического содержания *Sūrya-Sidhānta* сказано, что в начале второго века, за 2160000 лет до начала *kali-yuga*, начали свое движение солнце, луна и пять больших планет. В эту эпоху светила эти находились на одной прямой линии, проходящей чрез солнце, в полночь, под меридианом города *Lanka*. От этого места и следует начинать счет. Место, названное индусами *Lanka*, принадлежит к области их фантазии. Период времени в 4 320 000 лет носил название *Mahā-yuga*. 360 человеческих годов, т. е. обыкновенных годов, равнялись одному божескому году; таким образом число годов заключающихся во всех четырех периодах равнялось 12 000 божеских годов.

После составления законов Ману воззрения браминов на продолжительность периодов времени, прошедших со времени сотворения мира, значительно расширились; период в 4 320 000 лет представляется уже воображению браминов слишком незначительным и коротким. Они вводят представление о новом периоде, именно 1000 раз взятый период в 4 320 000 лет они принимают равным одному дню Браммы, т. е. продолжительности существования всего мира. Период этот подразделялся на другие. 71 *mahayugas* составляли период Ману или *manvantara*. Каждому дню Браммы соответствовала равная ему ночь. Число всех *manvantara*, по понятиям браминов, было бесконечно. После каждого *manvantara* следовал потоп, все разрушалось, а затем с наступлением следующего периода все создавалось вновь. 720 000 *mahayugas* или 3 110 400 000 000 человеческих годов

Говоря объ индусской Геометрии, мы упомянули о индусских ученых, которые имѣли обыкновеніе приписывать себѣ чужія изобрѣтенія и открытія и тѣмъ многократно вводили въ заблужденіе европейскихъ ученыхъ и въ томъ числѣ извѣстнаго Кольбука *); къ этому можно прибавить еще слѣдующее: нѣкоторые ученые, въ послѣднее время, стали съ большимъ недоумѣніемъ относиться къ глубокой древности всей индусской науки вообще, такъ напримѣръ извѣстный Седильо не вѣритъ даже въ глубокую древность санскритскаго языка, указывая на то, что нѣтъ ни одной санскритской надписи между многочисленными развалинами древнихъ пагодъ. Санскритскій языкъ никогда не былъ языкомъ разговорнымъ, это былъ священный языкъ браминовъ, на что указываетъ само названіе *sanc-tum scriptum* **). Къ этому можно прибавить еще то, что Кольбрукъ, много занимавшійся индусской литературой, положительно утверждаетъ, что санскритскій языкъ весьма мало отличается отъ греческаго. Мы уже выше упо-

составляли божескій годъ. По истеченіи одного вѣка Брами, т. е. божескихъ годовъ, или 720 000 *magayugas*, или 3 110 400 000 000 000 человеческихъ лѣтъ, послѣ разрушенія и сотворенія 36 000 міровъ, должно наступить окончательное распаденіе всѣхъ веществъ и матерій. Самъ Брами перестаетъ существовать и онъ возвращается въ то состояніе, изъ котораго онъ вышелъ.

Послѣ періода отдыха и тьмы снова наступаетъ цѣлый періодъ міровъ. Снова является Брами. Подобный порядокъ продолжается вѣчно.

Среди такого хаоса цифръ, понятіе о которыхъ недоступно нашему представленію, брамины вполнѣ точно и опредѣленно стараются указать событія въ хронологическомъ порядкѣ.

Напомнимъ здѣсь, что періодъ въ 4 320 000 годовъ былъ извѣстенъ халдейскимъ астрономамъ. Значеніе періода въ 4 320 000 лѣтъ, и почему именно это число, а не другое, было выбрано индусами за время продолжительности всего міра, пытался объяснить извѣстный Бю, въ своемъ сочиненіи: *Biot, J. B. Études sur l'astronomie indienne et chinoise. Paris. 1862. in-8.*

Вопросъ о значеніи большихъ чиселъ, употребляемыхъ индусами, разобранъ въ статьѣ: *Albrecht Weber, Vedische Angaben über Zeittheilung und hohe Zahlen.*, помѣщенной въ „*Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft*“ за 1861 г.

*) Извѣстный ориенталистъ Кольбрукъ (Henri Thomas Colebrooke) род. въ 1765 г., умеръ въ 1835 г. Въ 1782 г. онъ отправился въ Индію, гдѣ занималъ мѣсто секретаря Ост-Индской Компаніи, потомъ онъ занималъ должность судьи въ Бенгалѣ и наконецъ въ 1805 г. верховнаго судьи въ Калькуттѣ. Въ 1797 г. Кольбрукъ издалъ собраніе индусскихъ законовъ, въ 4-хъ томахъ. Онъ написалъ много сочиненій, изъ которыхъ наиболее извѣстны: „*Miscellanous essays*, Lond. 1827, 2-vol. in-8“, санскритскій словарь; грамматика Панини и мн. др. Во время бытности своей въ Индіи Кольбрукъ собралъ множество древнихъ рукописей. Пробывъ болѣе 30 лѣтъ въ Индіи, Кольбрукъ возвратился въ 1816 г. въ Англію, гдѣ основалъ Азіатское Общество въ Лондонѣ.

**) Санскритскій языкъ это собственно языкъ классическій, ученый. Обыкновенный же языкъ, народное нарѣчіе, это *праkrit*, который раздѣляется на нѣсколько нарѣчій.

минали о томъ, что пандиты обманывали европейскихъ ученыхъ, выдавая за свои собственныя сочиненія, заимствованное изъ иностранныхъ сочиненій. Объ этомъ упоминаетъ еще Альбируни, арабскій писатель XI в., сопровождавшій Махмуда во время его похода на Индостанъ *); онъ разсказываетъ, что имъ были переведены для индусовъ, нѣкоторые отрывки изъ сочиненій Евклида и Птолемея, но брамины немедленно переложили ихъ на стихи и представили въ такой видоизмѣненной формѣ, что онъ самъ едва могъ узнать свои переводы. Миссіонеры упоминаютъ также объ астрономическихъ таблицахъ Лагира, переведенныхъ на санскритскій языкъ, но индусскіе ученые астрономы выдаютъ ихъ за свое собственное изобрѣтеніе; Кольбрукъ, а также другіе ученые упоминаютъ, что они нѣрѣдко дѣлались жертвами обмана пандитовъ. Обманы были еще тѣмъ не трудны, что большая часть сочиненій индусовъ написаны на пальмовыхъ листьяхъ (*oles*), изъ которыхъ потомъ сшивали книги; листья эти всегда легко подмѣнить и придать имъ болѣе древній видъ. Подобные факты необходимо заставляютъ относиться весьма осторожно къ вопросамъ, гдѣ дѣло идетъ объ индусскомъ происхожденіи. Седильо даже утверждаетъ, что легенды о Кришнѣ (*Kristna*) и сопровождающіе ее комментаріи появились уже тогда, когда христіанство проникло въ Индостанъ; онъ полагаетъ, что не христіане заимствовали у индусовъ: монастыри, исповѣдь, соборы и т. п., а совершенно обратно индусы у христіанъ. Извѣстный А. Веберъ, посвятившій всю свою жизнь изученію санскритской литературы замѣчаетъ, что есть основанія предполагать, что индусы заимствовали содержаніе своихъ дре-

*) Альбируни сопровождалъ халифа Махмуда во время похода въ Индію, предпринятаго въ началѣ XI в. Махмудъ высоко цѣнилъ науки и пригласилъ для участія въ своей экспедиціи многихъ ученыхъ, въ томъ числѣ Альбируни, и извѣстнаго врача Авиценну, занимавшихся въ то время, совмѣстно, изученіемъ медицины, математики и философіи, въ городѣ Каризмѣ при устьяхъ Оксуса. Но на предложеніе Махмуда Авиценна несогласился. Альбируни былъ основательно знакомъ съ греческимъ и санскритскими языками и имѣлъ самое многостороннее образованіе. Онъ авторъ многихъ сочиненій и въ томъ числѣ сочиненія о состояніи литературы и наукъ вообще въ Индіи во время прихода арабовъ; сочиненіе это написано Альбируни въ Индіи, въ 1031 г.

По словамъ Абульфарага, въ его „Арабской хроникѣ“, Альбируни перевелъ нѣкоторые изъ арабскихъ ученыхъ сочиненій на санскритскій языкъ. Абульфарагъ считаетъ его однимъ изъ самыхъ образованныхъ и ученыхъ людей своего времени. Онъ упоминаетъ также объ его астрономическихъ наблюденіяхъ, произведенныхъ въ Газнѣ, Кабулѣ, Пешаварѣ и другихъ городахъ.

Арабами было обращено особенное вниманіе на изученіе наукъ индусовъ, въ сожалѣнію объ этомъ существуетъ весьма мало указаній. Слѣды господства арабовъ въ Индіи сохранились до сихъ поръ, такъ напр. въ Дели ими была основана великолѣпная бібліотека.

нѣйшихъ астрономическихъ сочиненій, извѣстныхъ подъ именемъ *Сидгантъ*, изъ греческихъ сочиненій. Въ подтвержденіе подобныхъ мнѣній нѣкоторые ученые указываютъ на отрывокъ изъ сочиненія астрономическаго содержания, написаннаго Варага-Мигирой, жившимъ въ VI в., въ которомъ сказано: „хотя греки нечистые, но тѣмъ не менѣе они достойны уваженія за услуги, оказанныя ими наукамъ; тѣмъ болѣе брамины заслуживаютъ вниманія, такъ какъ кромѣ познаній въ наукахъ, они соединяютъ въ себѣ еще чистоту души“. На этотъ отрывокъ обратилъ вниманіе еще Альбируни, а впослѣдствіи Кольбрукъ и Рено*).

Другіе ученые противнаго мнѣнія, такъ напримѣръ, извѣстный Велке утверждалъ, что Архимедъ свое сочиненіе „О числѣ песчинокъ“ заимствовалъ изъ индусскихъ источниковъ. На послѣднее мнѣніе снова обратили вниманіе ученые въ настоящее время**).

Познакомившись съ методами и приемами индусскихъ математиковъ, мы увидимъ, что едва-ли можно съ вѣроятностью допустить, чтобы индускіе ученые заимствовали всѣ свои познанія у греческихъ философовъ, или обратно. Весьма можетъ быть, что первоначальныя—основныя зачатки математическихъ наукъ у индусовъ обязаны своимъ происхожденіемъ изъ-внѣ. На развитіе математическихъ наукъ у индусовъ, могли оказать съ одной стороны вліяніе познанія египтянъ и грековъ, съ другой—халдеевъ. Такое вліяніе несомнѣнно существовало, но во всякомъ случаѣ не подлежитъ сомнѣнію, что методы и приемы индусскихъ ученыхъ такъ своеобразны и представляютъ такъ мало сходства съ приемами древнихъ греческихъ геометровъ, что необходимо допустить, что развитіе индусской математики шло исполнѣ самостоятельно безъ всякаго посторонняго вліянія.

*) Въ послѣднее время появилась интересная статья: „*Leon Rodet, l'Algèbre d'Al-Khârizmi et les méthodes indiennes et grecque*“, помѣщенная въ *Journal Asiatique*, T. XI, на 1878 г., въ которой авторъ положительно утверждаетъ, что первоначальныя свои свѣдѣнія въ математическихъ наукахъ индусы заимствовали изъ сочиненій древнихъ греческихъ математиковъ.

Выраженіе для площади треугольника въ функціи его сторонъ, а также теорія многоугольниковъ вписанныхъ въ кругъ была изложена въ сочиненіи Герона Старшаго „О діоптрѣ“, а также въ III-й части его „Метрики“, на что мы уже указывали говоря о трудахъ Герона Старшаго на стр. 114—119 настоящаго сочиненія. Мартенъ въ своемъ замѣчательномъ изслѣдованіи о трудахъ Герона (*H. Martin, Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron l'Alexandrie, ect*, напечатано въ *Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, T. IV. Paris. 1854) положительно утверждаетъ, что сочиненія Герона были извѣстны индусамъ и что выраженіе для площади треугольника въ функціи сторонъ они заимствовали изъ его сочиненій. Впрочемъ, необходимо замѣтить, что подобный взглядъ не раздѣляютъ многіе ученые, въ томъ числѣ извѣстный Ганкель.

**) *F. Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens*. Paris. 1863. in-8.

Самое лучшее представленіе объ индусской математикѣ можно составить познакомившись съ содержаніемъ извѣстныхъ въ настоящее время сочиненій математическаго и астрономическаго содержания, написанныхъ индусскими учеными. Къ сожалѣнію, до сихъ поръ извѣстны весьма немногія сочиненія математическаго содержания, написанныя на санскритскомъ языкѣ*).

Самыя древнія, изъ извѣстныхъ до сихъ поръ сочиненій на санскритскомъ языкѣ, въ которыхъ можно найти слѣды познаній индусовъ въ математическихъ наукахъ, это *Калпасутра* (*Kalpasûtra*), т. е. сборникъ въ которомъ указаны правила какъ производить жертвоприношенія. При этомъ сочиненіи приложено другое маленькое сочиненіе геометрически-теологическаго содержания, въ которомъ даны правила какъ строить жертвенники, сочиненіе это носитъ названіе *Сулвасутра* (*Sulvasûtra*), т. е. „Правила веревки“. Въ настоящее время извѣстны три подобные сборника, составленные *Бодхаяна* (*Baudhâyana*), *Анастамба* (*Āpastamba*) и *Катияяна* (*Kātyāyana*). Къ сожалѣнію неизвѣстно время когда жили поименованныя лица. Нѣкоторые ученые полагаютъ, что они современники извѣстнаго грамматика Панини, жившаго по мнѣнію нѣкоторыхъ во II в. до Р. X., а по мнѣнію другихъ во II в. по Р. X. Весьма вѣроятно, что подобные сборники были составлены вскорѣ послѣ того, какъ написаны были Веды, т. е. священныя книги индусскихъ браминовъ. Веды же составлены около 1500 л. до Р. X.

Изученіемъ и изслѣдованіемъ содержанія „Правилъ веревки“ занимался Тибо, издавшій три извѣстные въ настоящее время подобные сборника**).

*) Европейцы познакомились съ математическими сочиненіями индусовъ только въ концѣ прошлаго столѣтія благодаря трудамъ Кольбрука, Страхера и Телера, написавшихъ слѣдующія сочиненія:

Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus, by *Edw. Strachey*. London, 1813. in-4.

Lilavati or a treatise on Arithmetic and Geometry by *Bhaskara Acharya*, translated from the original sanscrit by *J. Taylor*. Bombay, 1816, in-4.

Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the sanscrit of Brahmegepta and Bhaskara; translated by *H. T. Colebrooke*. London, 1817, in-4.

Изъ поименованныхъ сочиненій особеннаго вниманія заслуживаютъ труды Кольбрука. Многo интересныхъ свѣдѣній о математикѣ индусовъ также можно найти въ сочиненіи: *Buchner, De Algebra Indorum*. Elbing, 1821.

Въ послѣднее время „Сидгантацираманіа“ Баскари была переведена въ Калькуттѣ *Wilkinson*омъ и *Bâpû Deva Çâstrî* и напечатана въ *Bibliot. indic., new. series*, № 13, 28 за 1862 г. Другое сочиненіе „Сурія-Сидганта“ было переведено и комментировано *Bourgess*омъ и напечатано въ *Journ. of the Amer. orient. soc.* T. VI, Newhaven. 1860. Первые четыре главы сочиненія Баскари были также переведены *Brockhaus*омъ и напечатаны въ *Berich. der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch.* 1852.

**) Изъ числа такихъ сочиненій въ настоящее время изданы три, именo: „*The S'ulva-*

Правильное построение жертвенника считалось у браминов делом первостепенной важности; малейшая неправильность в направлении расположения или размерах различных частей жертвенника, по понятиям индусских браминов, влекло за собою непринятие жертвоприношения богами, о чем им страшно даже было подумать. Благодаря таким понятиям возникла целая наука о построении жертвенников или как ее называл Роде „ведическая геометрия“, остатки которой дошли до нас в сохранившихся Сулвасутрах. При построении жертвенников прежде всего проводилась главная—основная линия, т. е. ось симметрии фигуры основания жертвенника. Линия эта была всегда направлена с Запада на Восток и носила название „линии (ребра) спины (prācī)“. Площадь основания жертвенников обыкновенно имела форму какого-нибудь животного, как напр. птицы, черепахи и т. п. Различные части основания, даже если оно имело правильную геометрическую форму, носят названия различных частей фигуры животного, так напр. бедро, ребро, плечо и т. д. Направление главной оси жертвенников, т. е. линии идущей с Запада на Восток, определяли наблюдением тени вертикально-стоящего стержня до и после полудня. Подобный прием применялся также Витрувием. Из содержания некоторых правил Сулвасутр видно, что автору их была известна теорема Пифагора. Она является у него в следующей форме и выражена в следующих словах: „веревка, проведенная наискось в продолговатом квадрате образует тоже, что образуют вместе, каждая отдельная из мер: продольных и поперечных“. Как не темно это выражение, но без сомнения это есть предложение Пифагора, так как далее автор продолжает: „это мы познаем на числах: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24 12 и 35, 15 и 36“.

При построении жертвенников применяются треугольники, коих стороны 3, 4, 5 и 5, 12, 13, для проведения перпендикулярных линий. Бодгайна выражает это термином „провести плечо к линии спины“. Автор „Правил веревки“ вместо того, чтобы говорить, „треугольно нам квадрат построенный на линии“, выражает это в следующих словах: „то что образуется“. Мы уже видели, что теорему Пифагора он выражает словами: „то, что образуется на двух сторонах, равно тому, что образовано на диагонали“.

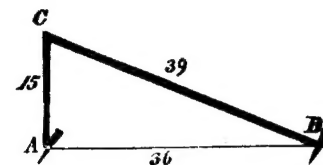
Вышеуказанным приемом находил направление восточно-западной линии также в Сурй-Сидгант. Когда эта линия найдена, то дей пер-

sūtras by G. Thibaut. Reprinted from the Journal, Asiatic Society of Bengal. Part. I for 1875. Calcutta, 1875. Вопросом этим также занимался Кантор в своих: „Gräkoindische Studien“, помещенных в „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, T. XXII, 1877.

пендикулярная находится при помощи веревки, пользуясь теоремой Пифагора. Прием заключается в следующем примере: пусть длина восточно-западной линии 36 падасов (padas); в обоих концах этой линии вбивают колы в землю. К этим кольям прикрепляют концы веревки длиной в 39 падас, на которой предварительно на расстоянии 15 падасов от одного из концов сделан узел. Если теперь натянуть веревку на поверхности земли, держа за узел, то получается прямой угол при конце восточно-западной линии (фиг. 1). Прием этот был известен,

шаг
до
узла

Фиг. 1.



как мы уже заметили выше, халдеям и египтянам. Подобным же приемом строили прямые углы Герон Старший.

В Сулвасутрах показаны также правила обращения одной фигуры в другую ей равновеликую, а также увеличение или уменьшение фигур в известном отношении. Знание этого было необходимо, так как жертвенники должны были быть с поверхностями различной величины. У индусов повторение того же, что и у древних греков при решении известной задачи „удвоенный куб“, решение которой повело к знакомству с коническими сечениями, о которых нет и следов у индусских математиков. Индусские ученые ограничились умением увеличить в кратное число раз данную плоскую фигуру, или иными словами найти квадратный корень. Подобные задачи они умели решать арифметически и геометрически. Применить же геометрический метод при извлечении кубических корней, которые они, как мы увидим ниже, извлекали с большим умением, представляло им невозможным, благодаря полному незнакомству их с коническими сечениями.

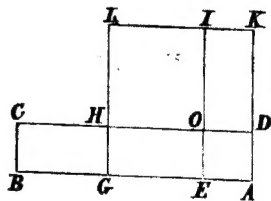
Геометрически извлечение квадратных корней Бодгайна выражает следующим правилом: веревка натянутая наискось равностороннего прямоугольника дает квадрат двойной площади. Веревка натянутая наискось продолговатого прямоугольника дает две площади, которые делят веревку, на три части вдоль большей и меньшей из сторон. Для пояснения второго случая Бодгайна приводит числа: 3 и 4, 12 и 5, 15 и 8, 7 и 24, 12 и 35, 15 и 36, которые представляют стороны прямоугольника. Из сказанного ясно, что Бодгайна доказывает Пифагорову теорему не на при-

прямоугольном треугольнике, а на прямоугольнике, при чем онъ различаетъ два случая, именно, когда катеты равны и когда они неравны *).

Приведенныя нами предложенія находятъ примѣненіе въ Сулвасутрахъ при построении жертвенниковъ, при чемъ въ большинствѣ случаевъ требуется рѣшить одинъ изъ слѣдующихъ двухъ вопросовъ: требуется обратить данную фигуру въ другую ей равновеликую, или же извѣстную длину нужно увеличить или уменьшить на столько, чтобы квадратъ на ней построенный увеличился въ отношеніи 1: m . Нахожденіе стороны квадрата въ 2, 3, 10, 40 большаго даннаго легко найти при помощи теоремы Пифагора. Прилагая послѣдовательно теорему Пифагора сначала къ прямоугольному равнобедренному треугольнику, а потомъ снова строя на этой гипотенузѣ, принятой за катетъ, равнобедренный треугольникъ и т. д., мы послѣдовательно получимъ соотвѣтствующія величины гипотенузъ, или какъ онѣ названы въ Сулвасутрахъ: $dikarant = \sqrt{2}$, $trikarant = \sqrt{3}$, $daçakarant = \sqrt{10}$, $catvarinçatkarant = \sqrt{40}$ и т. д.

Приемъ, употребленный Бодгайна, для обращенія одной фигуры въ другую ей равновеликую, существенно отличается отъ методовъ употребляемыхъ греческими геометрами. При обращеніи прямоугольника въ равновеликій квадратъ Бодгайна пользуется только Пифагоровой теоремой **). Сущность его приема заключается въ слѣдующемъ: отъ даннаго прямоугольника $ABCD$ отрѣзываютъ квадратъ $ADOE$, коего сторона $AE = AD$. Оставшуюся часть прямоугольника $EOCB$ при помощи прямой GH дѣлятъ пополамъ и лѣвую часть $GHCB$ прикладываютъ сверху къ маленькому квадрату $ADOE$, при чемъ она приметъ положеніе $DOIK$. Такимъ образомъ прямоугольникъ $ABCD$ обращенъ въ гномонъ $AGHOIKA$ ***), который

Фиг. 2.



*) Канторъ обращаетъ вниманіе на то, что точно такимъ же образомъ доказываетъ теорему Пифагора Геронъ Старшій въ своей Геометріи. Весьма вѣроятно, что и Пифагоръ обнаружилъ справедливость своего предложенія первоначально на квадратѣ и прямоугольникахъ.

**) Задачу эту Евклидъ въ своихъ „Началахъ“ рѣшаетъ совершенно иначе. Онъ опускаетъ перпендикуляръ изъ точки на окружности на діаметръ. См. Пред. 14, Кн. 2 „Начала Евклида“ стр. 131.

***). Подъ именемъ гномона въ „Началахъ“ Евклида понимаютъ фигуру выдѣленную изъ квадрата, какъ напр. фигура $KAGHOIK$ (фиг. 16).

легко превратить въ квадратъ при помощи теоремы Пифагора. Особеннаго названія для гномона Бодгайна не употребляетъ, онъ говоритъ прямо „разность двухъ квадратовъ $AKLG$ и $OILH$ “) (фиг. 2).

Особенное вниманіе обратили индусскіе математики на извлеченіе квадратныхъ корней, которое, какъ извѣстно, геометрически всегда возможно, но арифметически часто выполнимо только по приближенію, до какой угодно степени точности. Степень приближенія полученная Бодгайна и Апастамба при извлеченіи $\sqrt{2}$ вполне достаточна въ практическихъ примѣненіяхъ и весьма близка къ истинной величинѣ. Выраженіе, данное ими для $\sqrt{2}$ заслуживаетъ особеннаго вниманія, оно слѣдующее:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34} **).$$

Самые интересные вопросы Сулвасутръ относятся къ попыткамъ индусскихъ математиковъ рѣшить задачу о равенствѣ прямолинейной и круглой фигуръ. Вопросъ этотъ интересенъ какъ съ арифметической, такъ и съ геометрической точекъ зрѣнія. Греческіе геометры, какъ извѣстно, пытались рѣшить вопросъ о превращеніи даннаго круга въ равновеликій квадратъ, т. е. задачу извѣстную подъ именемъ *квadrатуры круга*, индусскіе же математики въ Сулвасутрахъ стремятся рѣшить обратный вопросъ, т. е. превращеніе даннаго квадрата въ равновеликій кругъ; вопросъ этотъ можно назвать *циркулятурой квадрата*. Рѣшеніе данное въ Сулвасутрахъ состоитъ въ слѣдующемъ: въ данномъ квадратѣ $ABCD$ проводятся діаго-

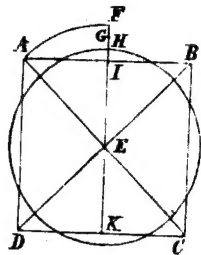
*) Въ сочиненіяхъ Баскары также встрѣчается гномонъ, но особеннаго термина для его обозначенія нѣтъ. Канторъ полагаетъ, что гномонъ указываетъ на греческое вліяніе.

**) Теонъ Смирнскій для $\sqrt{2}$ находитъ слѣдующія послѣдовательныя приближенія $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$. Последнее, изъ написанныхъ выраженій, есть ничто иное какъ часть выраженія для $\sqrt{2}$ данная Бодгайномъ, т. е. $\frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4}$. Выраженіе, данное Теономъ, Бодгайна представляетъ въ видѣ единицы и суммы дробей съ числителями равными единицей.

Происхожденіе послѣдняго члена $\frac{1}{3.4.34}$ выраженія для $\sqrt{2}$, Канторъ объясняетъ слѣдующимъ образомъ: величина $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} = \frac{17}{12}$ слишкомъ велика для $\sqrt{2}$, такъ какъ $(\frac{17}{12})^2 = 2 \frac{1}{144}$; болѣе же точная величина найдется если изъ приведеннаго выше выраженія для $\sqrt{2}$ вычтемъ $\frac{1}{144} : 2 \frac{17}{12} = \frac{1}{144} : \frac{31}{12} = \frac{1}{12.34}$, послѣдняя же дробь есть ничто иное какъ послѣдній членъ выраженія, даннаго Бодгайномъ для $\sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{3.4.34}$.

или AC и BD (фиг. 3), чрезъ точку ихъ пересѣченія E проведена прямая KI , параллельная сторонамъ AD и BC квадрата. Изъ точки E , какъ

Фиг. 3.



изъ центра, радиусомъ равнымъ AE , опишемъ дугу AF круга, которая пересѣчетъ продолженіе прямой KI въ точкѣ F . Отрѣзокъ IF въ точкахъ G и H дѣлитъ на три равныя части и радиусомъ EH описываютъ кругъ, который и принимаютъ за искомый—равновеликій данному квадрату $ABCD$.

Построенію этому Канторъ стремится дать слѣдующее численное толкованіе: отрѣзокъ IF раздѣленный на три равныя части, онъ предполагаетъ, былъ принятъ за 3, а потому: $EA = EI + 3$ или $EI \cdot \sqrt{2} = EI + 3$, слѣдовательно:

$$EI^2 - 6EI = 9$$

или

$$EI = 3 + \sqrt{18}$$

принимая въ первомъ приближеніи $\sqrt{18} = 4$, находимъ $EI = 7$ или $EA = 10$, т. е. $\sqrt{2} = \frac{10}{7}$. Если такое предположеніе справедливо, то сторона квадрата равна 14, діагональ—20, а діаметръ равновеликаго ему круга—16. Площадь же этого круга выразится чрезъ:

$$14^2 = (16 - 2)^2 = \left(16 - \frac{16}{8}\right)^2$$

Послѣднее выраженіе заключаетъ въ себѣ двойное правило, именно: 1) при рѣшеніи вопроса о циркулярѣ квадрата за діаметръ круга принимаютъ $\frac{8}{10}$ діагонали квадрата, и во 2) при рѣшеніи вопроса о квадратурѣ круга, за сторону квадрата принимаютъ $\frac{7}{8}$ діаметра круга *).

*) Подобный пріемъ примѣняется также въ папирусь Ринда, гдѣ сторону квадрата, равновеликаго данному кругу, принимаютъ равной $\frac{8}{9}$ діаметра этого круга (см. стр. 337).

Для нахождения стороны квадрата, равновеликаго данному кругу, Бодгайна пользуется еще болѣе точнымъ выраженіемъ, именно сторону квадрата онъ принимаетъ равной не $\frac{7}{8}$ діаметра даннаго круга, а вводитъ еще въ выраженіе діаметра множитель:

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8}$$

Послѣдніе три члена этого выраженія получились вслѣдствіи того, что Бодгайна желалъ выразить примѣненное имъ построеніе формулой пользуется не выраженіемъ:

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.7}$$

а вышеприведеннымъ уже:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.31} = \frac{577}{408}$$

Изъ фигуры 17 видно, что:

$$EA = EI \cdot \sqrt{2}, \quad FI = EI(\sqrt{2} - 1), \quad HI = EI \frac{\sqrt{2} - 1}{3},$$

$$EH = EI + HI = EI \cdot \frac{\sqrt{2} + 2}{3}, \quad EI = \frac{3}{2 + \sqrt{2}} \cdot EH$$

въ выраженіяхъ этихъ EI есть половина стороны квадрата, а EH радиусъ равновеликаго ему круга. Послѣднее изъ написанныхъ выраженій представляетъ соотношеніе между половиной стороны квадрата и радиусомъ круга; удвоенное это выраженіе представитъ соотношеніе между стороной квадрата и діаметромъ равновеликаго ему круга, оно зависитъ также отъ того же множителя $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$, что и первое соотношеніе. Подставляя въ этотъ мно-

житель вмѣсто $\sqrt{2}$ найденное выше его значеніе $\frac{577}{408}$, найдемъ, что онъ выразится чрезъ:

$$\frac{1224}{1393} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8.29} - \frac{1}{8.29.6} + \frac{1}{8.29.6.8} - \frac{41}{8.29.6.8.1393}$$

Послѣдній членъ написаннаго выраженія разнится всего на $\frac{1}{34}$ отъ предшествующаго и по своей числовой величинѣ незначителенъ, по этой причинѣ Бодгайна вѣроятно пренебрегъ имъ.

Кромѣ указаннаго правила для нахождения квадратуры круга, находится еще другое, которое одинаково примѣняется Бодгайна, Анастанба и Катаяна. Правило это заключается въ слѣдующемъ: „раздѣли (діаметръ)

на 15 равных частей и отним 2 части, это (т. е. то, что останется) и представить приблизительно сторону квадрата *)".

В Сулвасутрах отношение окружности къ диаметру, т. е. π , полагается равным 3, такъ какъ площадь квадрата или равновеликаго ему круга предполагается равной утроенному квадрату, построенному на радиусѣ. Мы уже выше упоминали, что халдейскіе математики полагали $\pi = 3$, а потому весьма вѣроятно, что это выраженіе перешло отъ нихъ къ индусамъ.

Познакомившись съ основными началами ведической Геометріи можно видѣть какъ важны Сулвасутры для исторіи развитія математическихъ наукъ у индусовъ. Весьма вѣроятно, что со временемъ когда ученые познакомятся съ другими сочиненіями подобнаго же содержанія станутъ извѣстны новыя данныя, которыя прольютъ свѣтъ и до нѣкоторой степени объяснятъ характеръ и направленіе принятое математическими науками у индусовъ и своеобразность ихъ методовъ и приѣмовъ. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію собственно математическихъ сочиненій, написанныхъ индусскими учеными.

Самый древній изъ математиковъ, о которомъ упоминается въ индусскихъ лѣтописяхъ, это *Ариабатта*, написавшій около 550 г. по Р. Х. **) сочиненіе математически-астрономическаго содержанія, подъ заглавіемъ „*Ариабаттіамъ*“. Изъ другихъ сочиненій мы познакоимся съ трудами *Брамагунты*, жившаго въ VII в., и *Баскары* жившаго въ XI в. ***). До послѣд-

*) Канторъ обращаетъ вниманіе, что подобный приѣмъ приближенія встрѣчается у Герона Старшаго при нахожденіи высоты равносторонняго треугольника. Отъ Герона онъ перешелъ къ римскимъ землеѣмцамъ и примѣняется Колумеллой.

**) Въ настоящее время вполне точно извѣстно время, когда жилъ Ариабатта, благодаря указанію, находящемуся въ III-й главѣ его сочиненія Ариабаттіамъ. Онъ говоритъ „когда прошло шестьдесятъ разъ шестьдесятъ и истекло три юга, я могъ безъ всякаго сомнѣнія считать двадцать три года своего существованія“. Изъ этого видно, что Ариабатта родился въ 3600—23=3578 году каліюги. Начало настоящаго лѣтоисчисленія индусовъ совпадаетъ съ 78 годомъ нашей эры, и по словамъ Брамагунты началось въ 3179 каліюги, слѣдовательно первый годъ новой эры приходится на 3101 или 3102 гг. до Р. Х., а потому Ариабатта родился въ 3577—3102 гг. каліюги или въ 475 нашей эры. Сочиненіе его можно отнести къ началу VI в.

Ариабатта родился въ Паталипутрѣ (городъ цвѣтовъ), древней столицѣ историческихъ государствъ Индостана, въ которомъ процвѣтала школа ученыхъ и гдѣ вѣроятно преподавали свои ученія также Ариабатта. Во время Ариабатты процвѣтала еще другая школа, въ Уджайни (Ujjaini), представителемъ этой школы былъ Варага-Мигира, написавшій сочиненія астрономическаго и математическаго содержанія.

***) Времена когда жили Ариабатта, Брамагунта и Баскара установлены вполне точно

наго времени было обращено болѣе вниманія на сочиненія послѣднихъ двухъ, изъ упомянутыхъ нами ученыхъ, хотя во многихъ частяхъ трактаты ихъ содержатъ только дальнѣйшее развитіе, сказаннаго уже прежде Ариабаттой. На основаніи сказаннаго, мы сначала разсмотримъ сочиненіе Ариабатты, а затѣмъ уже перейдемъ къ сочиненіямъ Брамагунты и Баскары.

Ариабатта. Первый обратившій должное вниманіе на сочиненіе Ариабатты „*Ариабаттіамъ*“ былъ профессоръ Лейденскаго университета Кернъ, издавшій его текстъ въ 1874 г. на санскритскомъ языкѣ. Къ тексту приложенъ пространный комментарий „*Bhatadīpikā*“, написанный на это сочиненіе *Парамадисварой* (*Paramādīśvara*), относительно котораго Керну не удалось собрать никакихъ указаній *).

„*Ариабаттіамъ*“ состоитъ изъ четырехъ частей, которыя заключаютъ всего 123 строфы. Содержаніе, каждой изъ этихъ частей, слѣдующее:

I—„Небесная гармонія“,—это собраніе численныхъ таблицъ.

II—„Начала счисленія“.

III—„О времени и его измѣреніи“.

IV—„Шары“.

Въ настоящее время переведена только вторая часть **) „*Ариабаттіама*“ французскимъ ученымъ *Роде* (Rodet), написавшимъ къ ней комментарий ***) въ 1879 г. Познакоимся вкратцѣ съ содержаніемъ переведенной

благодаря изслѣдованіямъ: *Bhaṭṭa Dajī*, On the age and authenticity of the works of Varāhamihira, Brahmagupta, Bhāttapāla and Bhaskarāchārya, помещеннымъ въ „*Journal of the Asiatic Society*“ за 1865 г.

*) Кроме сочиненія „*Ариабаттіамъ*“ Ариабатта написалъ еще другое, заглавіе котораго: „*Десять куплетовъ* (*Daśagītī*)“; въ настоящее время, по словамъ Керна, сохранились еще рукописные списки этого сочиненія.

**) Первая часть „*Ариабаттіама*“ заключаетъ собраніе численныхъ таблицъ, имѣющихъ примѣненіе при астрономическихъ вычисленіяхъ. Въ III-й части въ самомъ началѣ говорится о раздѣленіи времени. Время авторъ дѣлитъ на слѣдующія части: „годъ имѣетъ двѣнадцать мѣсяцевъ; мѣсяць—тридцать дней; день состоитъ изъ шестидесяти *nādi*, а каждый *nādi* изъ шестидесяти *vinādi*“. Далѣе Ариабатта продолжаетъ: „шестидесять долгихъ гласныхъ составляютъ одинъ *vinādikā* или же шесть вдыханій“.

***) Текстъ второй части „*Ариабаттіама*“, переведенной Роде, заключаетъ всего 33 правила, изложенныхъ въ стихотворной формѣ, въ самомъ сжатомъ видѣ. Мы полагаемъ не безынтереснымъ привести здѣсь нѣкоторыя изъ правилъ перевода Роде.

I.—Восхваливъ Брахму, Землю, Луну, Меркурію, Венеру, Солнце, Марса, Сатурна и созвѣздія, Ариабатта въ „Городѣ цвѣтовъ“ излагаетъ начала высокочтимой науки, состоящей въ слѣдующемъ.

II.—*Eka, daśan, śata, sahasra, ajuta, niyuta, prayuta, kōti, arbuda, eranda* относительно своего мѣста (положенія), каждое въ десять разъ больше слѣдующаго.

III.—„Квадратъ“ (*carga*) есть четырехугольникъ съ равными сторонами; его „площадь“,

части „Ариабгаттіама“, которая укажетъ намъ состояніе математики во время Ариабгатты *).

Въ началѣ второй части авторъ приводитъ названія десяти чиселъ, изъ которыхъ каждое предъидущее въ десять разъ больше послѣдующаго, но далѣе сотни милліоновъ, т. е. 10^8 , онъ не идетъ **). Затѣмъ слѣдуютъ опредѣленія квадрата и куба и выраженіе ихъ площади и объема. Ариабгатта говоритъ, что квадратъ есть четырехсторонникъ, съ равными сторо-

т. е. площадь есть, произведеніе двухъ равныхъ чиселъ.—Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть „кубъ“ (*ghana*—тѣло), и фигура съ двѣнадцатью ребрами.

VI.—Площадь треугольника (трехсторонника) равна произведенію перпендикуляра общаго двумъ отрезкамъ (половинамъ), и половины основанія.—Половина этого произведенія умноженная на высоту есть тѣло съ шестью ребрами.

VII.—Половина окружности (*parināha*) умноженная на половину діаметра (*ardha-mā-kamba*) даетъ площадь круга (*vritta*).—Этотъ послѣдній умноженный на свой собственный корень (квадратный) выразитъ точно объемъ шара (*gōla*).

IX.—Хорда шестой части окружности (*paridhi*) равна половинѣ діаметра.

X.—Прибавьте 4 къ 100, умножьте на 8, прибавьте еще 62000, это будетъ для діаметра равнаго двумъ мириадамъ (*ayutās*) приближенная величина окружности.

XI.—Раздѣлите (на равныя части) четверть окружности при помощи треугольника и четырехугольника, то получите на радіусѣ всѣ „полухорды“ (т. е. синусы—*juā-ardha*) дугъ (*cāra*), которыя пожелаете.

XIII.—Кругъ получается вращеніемъ. Прямоугольный треугольникъ опредѣляется гипотенузой (*karna*), прямоугольникомъ—діагональю (*karna*); горизонтальная линия—уровнемъ, вертикальная—отвѣсомъ.

XX.—Число членовъ есть: (сумма) умноженная на 8 разъ взятую разность, прибавленная къ квадрату избытка дважды взятаго перваго члена надъ разностью. Отъ полученнаго выраженія (взять) корень квадратный, уменьшенный на дважды взятый первый членъ. Полученное выраженіе дѣлать на разность, къ этому прибавляютъ 1 и берутъ половину.

XXII.—Послѣдній членъ, этотъ прибавленный къ единицѣ, этотъ увеличенный на число членовъ: отъ произведенія этихъ трехъ чиселъ возьмите одну шестую, это будетъ объемъ квадратной кучи.

XXX.—Разность между числами рупій, принадлежащихъ двумъ лицамъ, раздѣлите на разность предметовъ: частное будетъ стоимость предмета, если имущества ихъ равны.

*) Современникомъ Ариабгатты былъ *Варага-Мигира* (*Varāha-Mihira*), занимавшійся астрономіей и астрологіей. Варага-Мигира написалъ нѣсколько сочиненій, изъ которыхъ было болѣе известно Сангита (*Sanhita*), въ которомъ авторъ говоритъ о вліяніи и значеніи кометъ. Варага-Мигира принадлежитъ къ другой школѣ чѣмъ Ариабгатта.

Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира говоритъ, что самый древній, изъ извѣстныхъ ученыхъ носилъ имя Мая (*Maya*). Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій *Сурья-Сиддханта* (*Sūrya-Siddhānta*) индусскіе ученые приписываютъ Маю; объ этомъ также упоминаетъ Альбируни, къ сожалѣнію онъ не упоминаетъ времени, когда жилъ послѣдній.

**) Приемъ Ариабгатты подробно изложенъ въ статьяхъ: *Rodet, Leçons de calcul d'Āryabhata. Journal Asiatique Mai—Juin 1879.*—*Rodet, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhata. Jour. Asiat. Octobre—Novem.—Décem. 1880.*

нами, площадь же его есть произведеніе двухъ равныхъ чиселъ. Произведеніе трехъ равныхъ чиселъ есть кубъ, или фигура съ двѣнадцатью ребрами. Всѣ фигуры и всѣ тѣла Ариабгатта выражаетъ числомъ сторонъ и реберъ. Далѣе показано правило для извлеченія квадратныхъ и кубическихъ корней. Площадь треугольника Ариабгатта полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Для объема тетраэдра дано неправильное выраженіе. Площадь круга онъ полагаетъ равной произведенію половины окружности на радіусъ. Для шара же выраженіе объема дано неправильное, именно объемъ шара принимается равнымъ $\sqrt{\pi^3} R^3$. Принявъ это выраженіе за объемъ шара, отношеніе окружности къ діаметру выразится чрезъ

$$\pi = \frac{16}{9}.$$

Далѣе слѣдуетъ теорема Пифагора, которая выражена въ такой же почти формѣ какъ въ „Правилахъ веревки“. Затѣмъ слѣдуетъ рядъ предположеній, вытекающихъ изъ пифагоровой теоремы. Въ 10-мъ правилѣ показано какъ вычислить приближенное отношеніе окружности къ діаметру, которое, сдѣлавъ всѣ дѣйствія указанныя авторомъ, будетъ:

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

Выраженіе это замѣчательно по своей точности и способу какъ оно получается *). Также интересно, что это выраженіе впоследствии дано также Баскарой, но въ сокращенной формѣ, именно:

$$\pi = \frac{3927}{1250}$$

Въ 12-мъ правилѣ показано устройство таблицы синусовъ, которые выражены также, какъ и въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи „Сурій-Сидгантъ“ **). Синусы выражены въ минутахъ, т. е. въ шестидесятич-

*) Число 62832 принятое Ариабгаттой для діаметра равнаго двумъ мириадамъ, или радіуса равнаго одной мириадѣ, весьма интересно въ томъ отношеніи, что указываетъ какъ бы на греческое происхожденіе, такъ какъ одни греки считали при помощи мириадъ. Но съ другой стороны необходимо обратить вниманіе на то, что выраженіе $\pi = \frac{22}{7}$, данное Архимедомъ, нигдѣ не упоминается Ариабгаттой.

**) Самое древнее изъ астрономическихъ сочиненій индусовъ носитъ названіе *Сурья-Сиддханта* (*Sūrya*—солнце, *Siddhānta*—наука, система, знаніе), авторомъ его считаютъ *Асура-Мая* (*Asura-Maya*—демонъ Мая). Когда жилъ Асура-Мая нельзя сказать положительно, за недостаткомъ какихъ-либо положительныхъ указаній. Варага-Мигира, современникъ Ариабгатты, упоминаетъ Суріу-Сидганту, изъ чего можно заключить, что сочиненіе это было извѣстно въ V в. Въ сочиненіи этомъ многое носитъ слѣды греческаго вліянія, нѣкоторые

ных частях. На это слѣдуетъ обратить вниманіе, такъ какъ мы уже выше указали, что халдеи также употребляли шестидесятичную систему счисленія, которая была у нихъ въ большемъ ходу. Также приведены таблицы разностей синусовъ, изъ которыхъ видно, что Ариабатта дѣлитъ квадрантъ на 24 части, по $3^{\circ}45' = 225'$ въ каждой. Подобное дѣленіе встрѣчается также и у позднѣйшихъ писателей. Таблица разностей синусовъ, данная Ариабаттой, тождественна съ таблицей, находящейся въ „Сурій-Сидгантѣ“. Таблица эта слѣдующая:

Дуги	Синусы	Разности
0	0	225'
1	225'	224'
2	449'	222'
3	671'	219'
4	890'	215'
5	1105'	
...
...
...	...	37'
22	3409'	22'
23	3431'	7'
24	3438'	

геримы напоминаютъ греческія слова. Веберъ въ своей статьѣ „Zur Geschichte der indischen Astrologie“ помѣщенной въ „Indische Studien T. II“ обращаетъ вниманіе на то обстоятельство, что египетскіе цари изъ династїи Птолемеевъ въ индусскихъ надписяхъ назывались Туга-Мауа; на основаніи этого онъ высказываетъ предположеніе не есть-ли имя Асуга-Мауа, измѣненное Туга-Мауа, а потому не есть-ли Асуга-Мауа греческій астрономъ Птоломей, извѣстный авторъ „Альмагеста“, жившій во II в. по Р. X.

Вліяніе грековъ на нѣкоторыя отрасли наукъ индусовъ несомнѣнно. Варага-Мигира говоритъ, что названія различныхъ созвѣздіи онъ заимствовалъ у Явана-Руга, т. е. у греческаго мужа, такъ какъ подъ именемъ явана слѣдуетъ понимать грековъ. Въ своихъ сочиненіяхъ Варага-Мигира, а также другіе писатели, упоминаютъ городъ Ромака-Руга, т. е. Римъ, а также Явана-Руга, т. е. городъ грековъ—Александрію.

Устройство приведенной таблицы вполне понятно и можетъ быть выражено слѣдующей алгебраической формулой:

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n - \frac{S_n}{S_1}$$

гдѣ S_1 выражаетъ синусъ дуги 1 или $225'$; формула эта въ примѣненіи ко второму синусу дастъ:

$$449 = 225 + 224 = S_1 + \left(S_1 - \frac{S_1}{S_1} \right)$$

Вопросомъ о таблицахъ синусовъ, бывшихъ въ употребленіи у индусскихъ астрономовъ, много занимался Бургессъ. Исслѣдованія его по этому предмету помѣщены въ его комментаріяхъ на „Суріу-Сидганту“ *).

*) Сочиненіе это переведено подъ заглавіемъ: Translation of the Sūrya-Syddhānta; trans. by Rév. E. B. Burgess, New-Haven; Connecticut. 1860. in-8. Надъ переводомъ этого сочиненія также много трудился американскій ученый Whitney, высказавшій мнѣніе, что содержаніе „Суріу-Сидганты“ индусскіе ученые заимствовали изъ греческихъ источниковъ, написанныхъ, во всякомъ случаѣ, ранѣе „Альмагеста“ Птолемея. Въ началѣ 1860-хъ годовъ санскритскій текстъ „Суріу-Сидганты“ былъ напечатанъ въ сборникѣ „Bibliotheca indica“, благодаря трудамъ американца Fitz Edward Hall'a и нандита—профессора математики въ „Government College“ въ Бенаресѣ Bâpû-Deva Castri.

Астрономическій трактатъ „Суріу-Сидганты“ написанъ стихами, при чемъ всѣ числа и всѣ вычисленія выражены словами. Такъ какъ числа выражаются различными символическими представленіями, то нѣкоторые числа выражаются различными словами. Все сочиненіе состоитъ изъ однихъ правилъ и указаній хода вычисленій, поясненій и толкованій нѣтъ никакихъ. Въ виду такихъ особенностей чтеніе и изданіе переводовъ „Суріу-Сидганты“ было дѣломъ весьма трудное и требовало необходимо глубокаго знакомства съ лингвистическими особенностями санскрита и основательное знаніе астрономіи. Въ настоящее время задача эта рѣшена.

Главные вопросы, рѣшенные въ правилахъ „Суріу-Сидганты“, относятся къ опредѣленію для всякаго момента времени положенія солнца, луны и пяти планетъ; предсказывать затмѣнія солнца и луны, а также предсказывать различныя явленія, т. е. астрологическіе вопросы. На сколько извѣстно въ этомъ заключалось изученіе астрономіи въ школахъ браминновъ. Такой характеръ носило изученіе этой науки еще въ XVIII в.

По мнѣнію Вебера, составителя „Суріу-Сидганты“ были извѣстны нѣкоторые изъ сочиненій астрологическаго содержанія, написанныхъ нѣкоторыми учеными александрійской школы въ началѣ нашей эры. Въ числѣ такихъ сочиненій онъ полагаетъ было извѣстно индусамъ сочиненіе „О рожденіяхъ“ александрійскаго астролога Павла (Paulus Alexandrinus), жившаго въ 278 г. Нѣкоторые изъ правилъ I-й главы „Суріу-Сидганты“ несомнѣнно носятъ слѣды этого сочиненія. Каждая изъ главъ (adhikāga) „Суріу-Сидганты“ занимается извѣстнымъ классомъ вопросовъ. Изъ главъ особеннаго вниманія заслуживаютъ: I—„О среднихъ (мѣстахъ)“; II—„О видимыхъ (мѣстахъ)“; III—„О трехъ вопросахъ“; которые состоятъ 1-й, въ опредѣленіи направленія по которому видимо свѣтло, 2-й, опредѣленіе положенія этого направленія относительно четырехъ главныхъ точекъ горизонта, экватора и эклиптики; и 3-й

Въ 13-мъ правилѣ Аріабгатта излагаетъ теорію гномона. Слѣдующія правила также посвящены этому вопросу. Весьма странно, что Аріабгатта ничего не говоритъ о построеніи гномона.

По поводу теоріи гномона и опредѣленій, данныхъ Аріабгаттой, Парамадисвара въ своихъ комментаріяхъ весьма подробно описываетъ устройство прибора служащаго къ черченію круговъ, а также его употребленіе. Инструментъ этотъ онъ называетъ „ракомъ“ (*karkata*); затѣмъ онъ говоритъ о построеніи треугольниковъ на поле при помощи трехъ „палочекъ“ (*śalākā*), равныхъ по длинѣ тремъ сторонамъ треугольника; также указаны приемы для нивелированія даннаго мѣста, и употребленіе отвѣса *). Изъ словъ комментарія можно заключить, что приемы эти относятся къ весьма отдаленному времени и были общеизвѣстны.

Въ 18-мъ правилѣ изложено предложеніе, относящееся къ вычисленію затмѣній. Затмѣваемая часть свѣтила названа „выкупеннымъ кускомъ“ (*grāsa*); названіе это произошло отъ того, что по мифологическимъ представленіямъ индусовъ затмѣнія свѣтилъ происходятъ отъ укушенія свѣтилъ дракономъ (*Rāhu*).

Въ 19-мъ и 20-мъ правилахъ говорится объ ариѳметическихъ прогрессіяхъ. Правила данныя Аріабгаттой весьма интересны въ томъ отношеніи, что это суть тѣ же алгебраическія формулы, которыми пользуются въ настоящее время при нахожденіи суммы и числа членовъ ариѳметическихъ прогрессій. Пояснимъ это подробнѣе.

опредѣленіе момента этого положенія. IV-я глава посвящена луннымъ затмѣніямъ; V-я затмѣніямъ солнца. Въ VII-й главѣ говорится о вліяніи *nakshatras* на судьбу человека. Въ VIII-й главѣ разбирается вопросъ „О соединеніяхъ планетъ“.

Нѣкоторыя изъ вычисленій, указанныхъ въ правилахъ „Суріи-Сидганты“ были переданы *Davis*'мъ, а также издателями этого сочиненія *Hall*емъ и *Bārū-Devā*, которые на основаніи указанныхъ правилъ вычислили затмѣніе луны, имѣвшее мѣсто 6 февраля 1860 г., и затмѣніе солнца 26 февраля 1854 г. Полученныя ими результаты отступаютъ отъ истинныхъ, такъ какъ данныя, принятые индусскими учеными, при составленіи правилъ „Суріи-Сидганты“ необходимо могли измѣниться въ промежутокъ времени въ 1200 лѣтъ.

*) Приемъ для нивелированія, указанный въ комментаріяхъ Парамадисвары, весьма любопытенъ. Дословно онъ слѣдующій: „Сдѣлавъ на глазъ нивелировку даннаго мѣста, на немъ чертятъ кругъ, внѣ этого круга чертятъ „междукругіе“ (т. е. кольцеобразную площадь) шириною въ два или три пальца. Промежутки между двумя окружностями оглабляютъ и получаютъ выемку; выемку эту наполняютъ водой. Если выемка вся кругомъ наполнена водой въ уровень съ землей, то поверхность земли нивелирована правильно. Тамъ гдѣ (видно) пониженіе воды поверхность земли приподнята, тамъ гдѣ повышеніе воды поверхность земли ниже. Вотъ“.

Пусть S будетъ сумма членовъ ариѳметической прогрессіи, состоящей изъ n членовъ, простирающихся отъ p -го по q -й. Извѣстно, что:

$$\begin{aligned} S &= q\left(a + \frac{q-1}{2}r\right) - p\left(a + \frac{p-1}{2}r\right) \\ &= (q-p)a + \left[\frac{q(q-1)}{2} - \frac{p(p-1)}{2}\right]r \\ &= (q-p)a + \frac{r}{2}(q^2 - p^2 - q + p) \\ &= (q-p)\left[a + \frac{r}{2}(q+p-1)\right] \\ &= (q-p)\left[a + \left(\frac{q-p-1}{2} + p\right)r\right] \\ &= n\left[a + \left(\frac{n-1}{2} + p\right)r\right] \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Полагая въ послѣднемъ выраженіи $p=0$, находимъ:

$$S = n\left(a + \frac{n-1}{2}r\right)$$

или располагая по убывающимъ степенямъ n , находимъ:

$$n^2r - (r-2a)n - 2S = 0 \quad (m)$$

откуда, рѣшая это уравненіе второй степени, находимъ:

$$n = \frac{(r-2a) \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8Sr}}{2r} \quad (n)$$

или:

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{-2a \pm \sqrt{(r-2a)^2 + 8Sr}}{r} \right] \quad (\beta)$$

Выраженія (α) и (β) формулированы Аріабгаттой въ правилахъ 19-мъ и 20-мъ. Правило 20-е мы привели въ примѣчаніи (стр. 16). Выраженія эти Аріабгатта читаетъ справа на лѣво. Изъ выше сказаннаго слѣдуетъ, что во время Аріабгатты было извѣстно рѣшеніе уравненій 2-й степени въ общей формѣ (m):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

рѣшеніе представлялось въ видѣ (n):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Также заслуживаетъ вниманія, что было извѣстно преобразование уравненія (n) къ виду (β), а это показываетъ, что индусскимъ математикамъ было извѣстно производство алгебраическихъ вычисленій и преобразованій.

Въ 21-мъ правилѣ показано вычисленіе числа ядеръ въ треугольной кучѣ. Правила формулированія Ариабгаттой суть ничто иное какъ слѣдующія алгебраическія формулы:

$$P = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

и

$$P = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

Послѣдняя формула весьма интересна въ томъ отношеніи, что изъ нея видно, что Ариабгатта умѣетъ совершенно точно найти число ядеръ въ треугольной кучи, сосчитавъ только число ядеръ ребра, между тѣмъ какъ онъ не умѣетъ найти объема тетраэдра по данной высотѣ и площади (см. стр. 17)*).

Въ 22-мъ правилѣ формулировано выраженіе для нахождения числа ядеръ въ кучѣ съ квадратнымъ основаніемъ, т. е. формула:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} \quad (k)$$

Другая часть этого правила показываетъ, что Ариабгаттѣ извѣстна формула:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2$$

т. е. сумма кубовъ первыхъ чиселъ равняется квадрату суммы этихъ чиселъ.

Къ 22-му правилу комментаторъ Парамадисвара дѣлаетъ замѣчаніе, въ которомъ говоритъ, что въ выраженіи (k) необходимо принять во вниманіе, что „последній членъ“ (pada) и „число членовъ“ (gaccha) имѣютъ одно и то же числовое значеніе.

Въ 25-мъ правилѣ дано выраженіе для вычисленія сложныхъ процен-

*) Изъ приведеннаго можно думать, что мнѣніе нѣкоторыхъ ученыхъ, что теорія фигурныхъ чиселъ явилась какъ слѣдствіе умѣнія вычислять площади и объемы, не основательно.

товъ. Формула немного разнится отъ употребляемой въ настоящее время, такъ какъ индусы руководствовались иными началами при взываніи процентовъ; это видно изъ численныхъ примѣровъ.

Въ 26-мъ правилѣ говорится о „тройномъ правилѣ“ (trairāṣikam). Здѣсь же говорится о приведеніи къ одному общему знаменателю. Дѣйствіе это выражено терминомъ: „родъ бытія одного и того же varna“. Слово varna въ первоначальномъ значеніи означаетъ „цвѣтъ“, но его употребляютъ также въ смыслѣ касты. Въ приведенномъ правилѣ оно примѣняется въ послѣднемъ смыслѣ и означаетъ собою слово „родъ, видъ“.

Въ 28-мъ правилѣ Ариабгатта формулируетъ особый методъ, бывшій весьма распространеннымъ въ Индостанѣ. Методъ этотъ, въ послѣдствіи, былъ названъ Баскарой „обратнымъ дѣйствіемъ“ (vilōma-kriyā). Приемъ состоитъ въ слѣдующемъ: примѣнить въ обратномъ порядкѣ къ данному—извѣстному результату, или же который требуется узнать по условію вопроса, всѣ тѣ обратныя дѣйствія, которыя данныя вопроса указываютъ произвести надъ искомымъ числомъ для полученія результата. Правило, данное Ариабгаттой, пояснено Парамадисварой на слѣдующемъ численномъ примѣрѣ: „Найти число, которое будучи умножено на 3, затѣмъ раздѣлено на 5, прибавлено къ нему 6, извлеченъ изъ него корень, вычтена 1, возвышенное въ квадратъ, дало 4?“.

Результатъ есть 4, или какъ индусскіе математики говорятъ „то что должно видѣть“ (dr̥c̥yam). Послѣднее дѣйствіе, изъ котораго получился этотъ результатъ, было возвышеніе въ квадратъ, слѣдовательно нужно изъ него извлечь корень квадратный, получимъ 2; изъ этого числа была вычтена 1, слѣдовательно нужно ее прибавить, получимъ 3; изъ этого числа былъ извлеченъ корень квадратный, слѣдовательно теперь нужно возвысить въ квадратъ, получимъ 9; къ этому числу было прибавлено 6, слѣдовательно его нужно вычесть, получимъ 3; число это было раздѣлено на 5, теперь нужно умножить, получимъ 15; полученное число было умножено на 3, нужно раздѣлить теперь на 3 и тогда получимъ наконецъ искомое число 5.

Въ 29-мъ правилѣ Ариабгатта формулируетъ приемъ для производства слѣдующихъ дѣйствій:

$$S_1 - d = a + b + c = m$$

$$S_1 - a = b + c + d = p$$

$$S_1 - b = a + c + d = q$$

$$S_1 - c = a + b + d = s$$

$$3a + 3b + 3c + 3d = m + p + q + s$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняя это дѣйствіе на численномъ примѣрѣ, замѣчаетъ, что такъ какъ:

$$\frac{m + p + q + s}{3} = a + b + c + d$$

то необходимо слѣдуетъ:

$$\frac{m+p+q+s}{3} - m = d, \quad \frac{m+p+q+s}{3} - p = a, \dots$$

Весьма вѣроятно, что послѣднія выраженія были также извѣстны Ариабгаттѣ *).

Въ 30-мъ правилѣ показано рѣшеніе уравненій 1-й степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Вопросъ формулированный въ этомъ правилѣ заключается въ слѣдующемъ: два лица (*purushau*) имѣютъ „равные капиталы“ (*arthakrtam tulyam* **); капиталы эти, каждый, состоятъ изъ извѣстнаго количества какихъ нибудь предметовъ (*gulikā* ***) и извѣстнаго количества денегъ (*rupakāś* ****). Число предметовъ, сумма денегъ у каждаго изъ лицъ различны. Означая чрезъ a и b число предметовъ, m и p количество рупій, можно составить уравненіе:

$$mx + a = px + b$$

откуда:

$$x = \frac{b-a}{m-p}$$

Послѣднее выраженіе формулировано въ 30-мъ правилѣ Ариабгаттой.

Относительно знаковъ при числахъ m , p , a , и b Ариабгатта не дѣлаетъ никакого замѣчанія, изъ чего можно заключить, что онъ, подобно

*) Канторъ находитъ, что приемъ, предложенный Ариабгаттой, представляетъ сходство съ методомъ *Тимарида*, названнымъ Ямвлихомъ *значимой*, о которомъ мы уже говорили въ отдѣлѣ „Греки“, на стр. 185.

Въ переводѣ на нашъ вышнѣшній алгебраическій языкъ эпантема выразится формулой:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = A$$

$$x_1 + x_2 = b \quad x_1 + x_3 = b' \quad x_1 + x_4 = b'' \quad x_1 + x_n = b^{(i)}$$

откуда всегда будемъ имѣть:

$$x = \frac{b + b' + b'' + \dots + b^{(i)} - A}{n-2}$$

Напомнимъ здѣсь, что эпантема, по мнѣнію Нессельмана, есть самый древній примѣръ алгебраическихъ разсужденій древнихъ грековъ (см. *Nesselmann, Die Algebra der Griechen*, Т. I. р. 233).

**) Терминъ *tulya* Ариабгатта употребляетъ въ смыслѣ равенства обѣихъ частей уравненія. Слово это происходитъ отъ слова *tula*—вѣсъ. Терминомъ этимъ индусскіе математикъ, по мнѣнію Роде, хотѣли выразить условіе, что обѣ части уравненія должны быть однородны.

***) Слово *gulikā* въ дословномъ переводѣ значить „маленькій шарикъ“. Роде употребляетъ его въ смыслѣ „предмета“. Употребленіе этого слова Ариабгаттой указываетъ, что въ его время не былъ еще извѣстенъ терминъ *yavat-tavat* для обозначенія неизвѣстной величины.

****) Слово *rupakāś* собственно означаетъ монеты съ изображеніями.

своимъ послѣдователямъ, при составленіи правилъ не обращать вниманія на знаки. Значеніе знаковъ при числахъ было вѣроятно извѣстно, такъ какъ въ логистикѣ *) индусовъ особенное значеніе имѣли „шесть дѣйствій“ (*śhad-vidham*), которыя они прилагали также къ отрицательнымъ количествамъ (*ṛnam*).

Формула, данная Ариабгаттой, для рѣшенія уравненія первой степени, съ однимъ неизвѣстнымъ, замѣчательна какъ по своей точности, такъ еще тѣмъ, что она есть самый общій видъ рѣшенія подобныхъ уравненій.

Въ 31-мъ правилѣ дано самое общее рѣшеніе извѣстной задачи „о курьерахъ“. На сколько можно понимать Ариабгатта занимается этимъ вопросомъ въ примѣненіи къ двумъ планетамъ. Подобное предположеніе весьма вѣроятно, такъ какъ сочиненіе Ариабгатты есть собственно астрономическій трактатъ **). Термины „обратное движеніе“ (*viloma*) и „движеніе въ томъ же направленіи“ (*anuloma*), употребленные въ упомянутомъ правилѣ, прилагались индусскими астрономами для выраженія движенія свѣтилъ, проложенныхъ на сферу небесную. Правило, формулированное Ариабгаттой, даетъ право предполагать, что ему была извѣстна формула:

$$\frac{x}{v} = \frac{d}{v \pm v'}$$

при чемъ онъ имѣлъ въполнѣ ясное понятіе о двойномъ знакѣ знаменателя ***) , или окончательнаго результата, въ зависимости отъ относительныхъ скоростей движенія, такъ какъ онъ говоритъ: „моментъ встрѣчи въ прошедшемъ или будущемъ“ (*atita—ēshya*).

Въ послѣднихъ двухъ правилахъ 32-мъ и 33-мъ формулировано рѣшеніе вопроса, который въ настоящее время носитъ въ элементарной Алгебрѣ названіе „неопредѣленнаго анализа первой степени“, и который со-

*) Подъ именемъ *логистики* греческіе математикъ понимали практическую Арифметику (см. стр. 126—127).

**) Ариабгаттѣ было извѣстно суточное вращеніе земли, которымъ онъ объясняетъ видимое движеніе звѣздъ на сферѣ небесной. Явленіе это по его словамъ представляетъ сходство „съ человѣкомъ идущимъ въ лодкѣ, которому кажется, что предметы на берегу удаляющіеся удаляются отъ него въ противномъ направленіи“. Школа въ *Ujjaini* не раздѣляла мнѣнія о суточномъ обращеніи земли.

***) Разстояніе x , которое проѣзжаютъ курьеры до мѣста встрѣчи, дается формулой $x = \frac{vd}{v \pm v'}$, въ которой d выражаетъ разстояніе между курьерами, а v и v' скорости съ которыми они ѣдутъ. Знакъ $+$ въ знаменателѣ относится къ случаю когда курьеры ѣдутъ на встрѣчу одинъ другому, знакъ $-$ къ случаю когда они ѣдутъ по одному и тому же направленію, при чемъ одинъ нагоняетъ другаго. Въ послѣднемъ случаѣ, если v' скорость, съ

стоитъ въ томъ, чтобы найти цѣлыя значенія для x и y , удовлетворяющія неопредѣленному уравненію:

$$ax + by = c$$

Рѣшеніе вопросовъ, относящихся къ неопредѣленному анализу было любимымъ занятіемъ индусскихъ математиковъ. Брамагупта и Баскара посвятили ему отдѣльныя главы въ своихъ сочиненіяхъ. Приемъ примѣненный Брамагуптой былъ названъ имъ *кутука* или *кутака* (*kuttaka*—разсѣвать, размельчать). Ариабгатта, какъ видно, былъ весьма основательно знакомъ съ рѣшеніемъ подобнаго рода вопросовъ, при чемъ даетъ рѣшеніе для гораздо болѣе общаго случая. Брамагупта и Баскара ограничиваются простымъ случаемъ уравненія:

$$ax + by = c$$

Ариабгатта же указываетъ методъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ двухъ совмѣстныхъ уравненій вида:

$$ax + by = c \quad \text{и} \quad ex + fz = g$$

Парамадисвара, въ своихъ комментаріяхъ, поясняетъ это на численномъ примѣрѣ:

$$8x + 29y = 4 \quad \text{и} \quad 17x + 45z = 7$$

при чемъ требуется, чтобы для одного и того же цѣлага значенія x , значенія:

$$y = \frac{ax - c}{b} \quad \text{и} \quad z = \frac{ex - g}{f}$$

выражались въ цѣлыхъ числахъ.

Роде въ своихъ комментаріяхъ на вторую часть „Ариабгаттіама“ подробно излагаетъ приемъ, употребленный Ариабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій 1-й степени. Изъ численнаго примѣра даннаго Парамадисварой видно, что методъ *разсѣванія* заключался въ нахожденіи для x двухъ значеній α и β , изъ коихъ каждое отдѣльно удовлетворяло-бы даннымъ уравненіямъ; значенія эти Ариабгатта называетъ „временными значеніями“ (*agra*). Всякое значеніе x , которое дѣлаетъ y цѣлымъ будетъ формы $\alpha + bt$; всякое же значеніе, которое дѣлаетъ z цѣлымъ будетъ формы $\beta + fu$; одно только значеніе будетъ удовлетворять обѣимъ уравненіямъ сразу и будетъ дано соотношеніемъ:

$$\alpha + bt = \beta + fu$$

которому идетъ курьеръ болѣе удаленный отъ наблюдателя и при томъ $v' > v$, то значеніе x получится отрицательное и знакъ — показываетъ, что x должно быть отсчитано въ противоположномъ направленіи, т. е. что встрѣча имѣла уже мѣсто.

или, при $\alpha > \beta$:

$$u = \frac{bt + (\alpha - \beta)}{f}$$

которое должно удовлетвориться цѣлыми значеніями u и t .

На этой формулѣ Ариабгатта излагаетъ свой методъ; онъ даетъ также способъ найти „временныя значенія“ α и β . Ариабгатта говоритъ: „нужно дѣлать знаменатель b , соответствующій большому изъ временныхъ значеній α , на знаменатель f , соответствующій меньшему изъ временныхъ значеній β ; затѣмъ нужно дѣлать остатки одинъ на другой“. Парамадисвара объясняетъ это на приведенномъ уже численномъ примѣрѣ, въ которомъ $\alpha = 15$, $\beta = 11$, $b = 29$ и $f = 45$; при этомъ $u = \frac{29t + 4}{45}$. Не входя въ дальнѣйшія подробности метода *разсѣванія*, замѣтимъ только, что въ основаніи его лежитъ теорія непрерывныхъ дробей *).

Изъ этого бѣлаго очерка второй части сочиненія Ариабгатты видно, сколько оно заключаетъ интереснаго и важнаго. Сочиненіе это, безъ сомнѣнія, оказало не малую пользу дальнѣйшему развитію математическихъ наукъ у индусовъ. Объяснить и комментировать сочиненіе Ариабгатты было дѣломъ весьма труднымъ, такъ какъ правила, данныя авторомъ, облечены въ форму самыхъ лаконическихъ и малопонятныхъ стиховъ. Текстъ второй части состоитъ всего изъ 33 строфъ!

Весьма желательно, чтобы былъ переведенъ весь текстъ „Ариабгаттіама“, а также комментаріи на него, сдѣланные Парамадисварой. Роде предлагаетъ дать переводъ текста, изданнаго Керномъ **).

Брамагупта. Брамагупта родился въ 598 г. по Р. Х. и написалъ около 628 г. сочиненіе астрономическаго содержанія, заглавіе котораго „Брама-Спутта-Сиддханта“, т. е. „Улучшенная система Брамы (Brāhma-sphuta-siddhānta)“. Сочиненіе это состоитъ изъ двадцати книгъ, изъ которыхъ XII-я посвящена Ариметикѣ (*Gaṇitadhyaya*), а XVIII-я Алгебрѣ (*Cuttacādhya*). Изложимъ вкратцѣ содержаніе поименованныхъ частей. Начнемъ съ Ариметики.

*) На это указываетъ также Роде въ своей статьѣ: *L. Rodet, Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhata. Journal Asiatique. VII série. T. XVI. № 3. 1880.*

**) Въ недавнее время профессоръ Лейденскаго университета Кернъ издалъ текстъ сочиненія Ариабгатты, подъ заглавіемъ: *The Āryabhatīya, with commentary Bhaṭṭadīpikā of Paramādisvara, edited by Dr. H. Kern. Leiden. 1874. in-4.* Вторая глава этого сочиненія была переведена на французскій языкъ и комментирована Роде и напечатана подъ заглавіемъ: *Leçons de Calcul d'Āryabhata, par Leon Rodet. Переводъ этотъ помѣщенъ въ Journal Asiatique, Mai-Juin, 1879, Paris, in-8.*

Арифметика состоитъ изъ десяти главъ. По мнѣнію Брамагупты вычислителемъ называется всякій основательно знакомый со всѣми 20-ю дѣйствіями и 8-ю опредѣленіями. Подъ именемъ *дѣйствій* онъ понимаетъ: 1) сложение, 2) вычитаніе, 3) умноженіе, 4) дѣленіе, 5) возвышеніе въ квадратъ, 6) извлеченіе квадратнаго корня, 7) возвышеніе въ кубъ, 8) извлеченіе кубическаго корня, 9)—14) шесть дѣйствій надъ дробными числами, 15)—19) правила трехъ, пяти, семи, девяти и одиннадцати членовъ, т. е. простое тройное правило и сложное тройное правило; и 20) правило мѣны. Къ числу *опредѣленій* Брамагупта относитъ: 1) опредѣленіе смѣсей, вычисленіе процентовъ и опредѣленіе пробы, 2) прогрессіи, 3) плоскую Геометрію, 4)—7) вычисленіе объемовъ при различныхъ практическихъ приложеніяхъ и 8) измѣреніе при посредствѣ тѣни.

Въ I-й главѣ Арифметики изложены всѣ 20 дѣйствій, которыя сведены къ 12 общимъ правиламъ, выраженнымъ въ самой сжатой формѣ. Болѣе обстоятельно онѣ разобраны уже впоследствии комментаторомъ Шатурведой, который поясняетъ ихъ примѣрами.

Глава II есть дополненіе первой, въ ней изложена шестидесятичная система счисления; въ концѣ главы Брамагупта замѣчаетъ, что этимъ вопросомъ онъ займется впоследствии подробнѣе при вычисленіи синусовъ. Въ своихъ комментаріяхъ Шатурведа говоритъ, что онъ поясняетъ только немногія части, такъ какъ въ противномъ случаѣ не хватило-бы нѣсколько сотъ томовъ для каждой главы.

Глава III содержитъ вычисленіе арифметическихъ строкъ. Далѣе показано нахожденіе суммы треугольныхъ чиселъ, а также квадратныхъ и кубическихъ.

Глава IV посвящена плоской Геометріи, которая составляетъ отдѣлъ Арифметики.

Геометрія у индусскихъ математиковъ носитъ совершенно иной характеръ, чѣмъ у греческихъ геометровъ. Строго-научной геометрической системы не существовало, объ аксіомахъ и доказательствахъ теоремъ нѣтъ и помину, такъ какъ индусскіе математики стремились только отыскать численныя соотношенія между различными частями данной фигуры, ни сколько не заботясь и не обращая вниманія на ея свойства. Основное начало, которымъ индусскіе математики руководствовались при выводѣ геометрическихъ истинъ и предложеній это принципъ *наглядности*; о справедливости предложеній они заключали прямо изъ чертежа, оно являлось у нихъ какъ логическое слѣдствіе построеній. Въмѣсто всякихъ разсужденій и доказательствъ индусскіе математики ограничивались тѣмъ, что чертили чертежъ, соответствующій извѣстному предложенію, дѣлали соответствующее построеніе и рядомъ

писали слово „смотри“,—это считалось вполне достаточнымъ. При выводѣ нѣкоторыхъ предложеній примѣняются методы: *конгруэнции* (тождества), *симметрии* и *подобія*. Впоследствии, когда мы будемъ говорить о трудахъ Паскари, мы приведемъ нѣсколько геометрическихъ примѣровъ, заимствованные изъ сочиненій послѣдняго ученаго. На особенности геометрическаго метода индусовъ мы уже указали въ началѣ настоящаго сочиненія (см. стр. 10—19). Изъ геометрическихъ фигуръ Брамагупта разсматриваетъ только треугольникъ, четырехугольникъ и кругъ. Предложенія разсмотрѣнныя имъ относятся только къ нахожденію площадей и вычисленію нѣкоторыхъ частей этихъ фигуръ. Теоремъ же относящихся къ какимъ либо свойствамъ этихъ фигуръ нѣтъ. Особенное вниманіе Брамагупта обратилъ на вычисленіе различныхъ частей четырехугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ; о другихъ четырехугольникахъ онъ не упоминаетъ. Въ виду этого и на основаніи различныхъ соображеній извѣстный Шаль*) высказалъ предположеніе, что вся геометрическая часть сочиненія Брамагупты имѣетъ своимъ назначеніемъ рѣшеніе слѣдующихъ четырехъ вопросовъ, относящихся къ треугольнику и четырехугольнику:

а) Найти въ функции сторонъ треугольника, его площадь и радіусъ круга, описаннаго около него**).

*) Геометріей индусовъ занимался извѣстный Шаль, который одинъ изъ первыхъ обратилъ особенное вниманіе на труды Кольбрука, Страхера и Тайлора. Одну изъ главъ своего сочиненія „*Aperçu historique*“ онъ посвятилъ этому вопросу.

Во всѣхъ извѣстныхъ намъ исторіяхъ математическихъ наукъ говорится весьма мало о развитіи и состояніи математическихъ познаній индусовъ. Арнетъ былъ первый обратившій вниманіе на этотъ вопросъ и посвятившій ему одну изъ главъ своего сочиненія: „*Arnell, Die Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Stuttgart, 1852. in-8.*“ Къ сожалѣнію на это сочиненіе было обращено мало вниманія и оно почти неизвестно. Въ послѣднее время математикой индусовъ занимался Ганкель въ одной изъ главъ своего сочиненія: „*Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8.*“ Многие Ганкель заимствовалъ изъ сочиненія Арнета. Наконецъ, въ вышедшемъ недавно первомъ томѣ сочиненія Кантора „*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*“, также весьма обстоятельно изложено все болѣе извѣстное до настоящаго времени объ познаніяхъ индусовъ въ математическихъ наукахъ.

**) Выраженіе для площади треугольника было также извѣстно арабскимъ геометрамъ, отъ которыхъ оно вѣроятно перешло на Западъ. Выраженіе это встрѣчается въ сочиненіяхъ: Савосарда, Фибоначчи, Иордана Немораріуса, Лукаса-де-Борго, Тартали, Кардана, Рамуса и мн. др. Весьма интересно, что справедливость этого предложенія индусскіе геометры обнаружили для треугольника, коего стороны 13, 14 и 15. Эти числа встрѣчаются также въ сочиненіи Герона Старшаго, а также у арабскихъ геометровъ. Ганкель высказалъ мнѣніе,

б) Построить треугольник, въ которомъ эта площадь и этотъ радіусъ были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ. При этомъ предполагается, что и стороны выражены также въ раціональныхъ числахъ.

в) Найти площадь четырехугольника, вписаннаго въ кругъ, въ функциі его сторонъ, а также его діагонали, перпендикуляры, опущенные изъ его вершинъ, отрезки, которые они дѣлаютъ между собою пересѣкаясь и діаметръ круга.

г) Построить четырехугольникъ, вписанный въ кругъ, коего-бы площадь, діагонали, перпендикуляры и другія различныя прямыя линіи, равно какъ и діаметръ круга, были-бы выражены въ раціональныхъ числахъ.

Таково содержаніе геометрической части сочиненія Брамагупты, которое, какъ мы уже упоминали выше, многіе долгое время принимали за Элементы Геометріи, въ родѣ „Началъ“ Евклида *). Особенное вниманіе было обращено математиками на выраженіе площади четырехугольника въ функциі его сторонъ, находящееся въ сочиненіи Брамагупты **). Вопросъ этотъ, какъ извѣстно, занималъ многихъ математиковъ XVI, XVII и XVIII столѣтій ***). Для отноше-

что индусами сначала было найдено выраженіе для высоты треугольника въ функциі сторонъ, т. е. формула:

$$h = \frac{V(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{2c}$$

а затѣмъ уже рядомъ алгебраическихъ преобразованій она нашла выраженіе площади въ функциі сторонъ, т. е. формулу:

$$\Delta = Vp(p-a)(p-b)(p-c) \\ 2p = a+b+c.$$

*) Были-ли извѣстны индусскимъ ученымъ „Начала“ Евклида неизвѣстно, такъ какъ по этому вопросу нѣтъ никакихъ указаній. Съ большой вѣроятностью можно предположить, что они съ этимъ сочиненіемъ не были знакомы, такъ какъ нѣтъ ничего въ сочиненіяхъ Аріабгатты, Брамагупты и Баскары напоминающаго пріемы Евклида. „Начала“ Евклида стали извѣстны индусамъ съ началъ XVIII в., благодаря переводу сдѣланному по повелѣнію раджи Ял-Синги. Арабскіе переводы „Началъ“ существовали въ Индостанѣ, но когда они были привезены туда неизвѣстно. При взятіи англичанами Серингалатнама въ 1799 г. въ библіотекѣ Типо-Санба были найдены арабскіе переводы „Началъ“ Евклида и нѣкоторыхъ сочиненій Аристотеля.

**) Вейсенборнъ занимался сравненіемъ различныхъ предложеній, относящихся къ трапеціи, встрѣчающихся въ сочиненіяхъ Евклида, Герона Старшаго и Брамагупты. См. Weissenborn, Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmagupta. Статья эта помѣщена въ „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, II—Heft, Leipzig. 1879“.

***) Выраженіе для площади вписаннаго въ кругъ четырехугольника въ функциі сторонъ четырехугольника занимало умы многихъ ученыхъ, изъ числа ихъ упомянемъ: Бенедиктиса, Скалигера, Преторіуса, Виета. Скалигеръ далъ невѣрное рѣшеніе. Вопросъ этотъ также предлагалъ для рѣшенія Регіомонтанусъ, при этомъ требовалось опредѣлить еще діаметръ

нія окружности къ діаметру Брамагупта даетъ выраженіе $\pi = \sqrt{10}$. Всего въ этой главѣ разсмотрѣно 23 вопроса. Въ заключеніе необходимо замѣтить, что самъ Брамагупта нигдѣ не говоритъ, что имъ взяты четырехугольники, вписанные въ кругъ.

Въ главахъ V—X Брамагупта занимается вычисленіемъ объемовъ и вмѣстимости нѣкоторыхъ тѣлъ. Главы эти не представляютъ ничего особеннаго.

Перейдемъ къ Алгебрѣ. Алгебра Брамагупты состоитъ изъ 8 главъ.

Въ I-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія первой степени, вида:

$$ax + by = c$$

въ цѣлыхъ числахъ. На рѣшеніе подобныхъ уравненій индусскіе математики обратили особенное вниманіе. Пріемъ, предложенный Брамагуптой для рѣшенія подобныхъ уравненій былъ уже извѣстенъ Аріабгаттѣ, но есть основаніе предполагать, что онъ былъ найденъ гораздо раньше. Мы уже выше замѣтили, что методъ данный Аріабгаттой для рѣшенія неопредѣленныхъ уравненій первой степени, былъ извѣстенъ между браминами подъ именемъ „способа разсѣванія“ и былъ основанъ на разложеніи дроби $\frac{a}{b}$ въ непрерывную дробь. Пріемъ этотъ впоследствии былъ снова предложенъ Эйлеромъ.

Во II-й главѣ подробно изложены дѣйствія надъ различными величинами, дѣйствія надъ корнями и ирраціональными числами, а также правила дѣйствій надъ неизвѣстными величинами.

Въ III-й главѣ изложено рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ.

Кругъ, въ который вписанъ четырехугольникъ. Самыя полныя рѣшенія вопроса о построеніи четырехугольника вписаннаго въ кругъ по четыремъ даннымъ сторонамъ даны Брамагуптой и Преторіусомъ, которые одинъ ввелъ условіе, что стороны выражены въ раціональныхъ числахъ. Въ настоящее время выраженіе это входитъ въ предѣлы элементарныхъ учебниковъ Геометріи, гдѣ оно встрѣчается въ формѣ:

$$S = \frac{1}{4} V(a+b+d-c)(a+b+c-d)(a+c+d-b)(c+b+d-a).$$

Выраженіе для площади треугольника въ функциі сторонъ есть частный случай только что написаннаго, для этого стоитъ только одну изъ сторонъ четырехугольника принять равной нулю. Такое положеніе было введено еще Шатурведой, однимъ изъ комментаторовъ Брамагупты, который говоритъ: „что для случая треугольника нужно вычесть послѣдовательно три стороны изъ четырехъ написанныхъ полусуммъ, и что четвертая остается безъ измѣненія“. Нѣкоторыя изъ примѣчаній Шатурведы указываютъ, что имъ не всегда было понято сказанное Брамагуптой.

Въ IV-й главѣ—рѣшеніе уравненій второй степени.

Въ V-й главѣ изложено рѣшеніе уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными. Большая часть изъ этихъ уравненій принадлежатъ къ числу неопредѣленныхъ и при ихъ рѣшеніи примѣняются правила, изложенныя въ первой главѣ. Многие изъ примѣровъ этой главы заимствованы изъ астрономіи.

Въ VI-й главѣ показано рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій вида:

$$xy + ax + by = c$$

Въ VII-й главѣ показано, какъ рѣшаются уравненія вида:

$$ax^2 + b = y^2$$

главнымъ образомъ въ цѣлыхъ числахъ.

Въ VIII-й главѣ изложены правила и задачи, имѣющія приложеніе въ астрономическихъ вычисленіяхъ.

Въ концѣ своего сочиненія Брамагупта говоритъ: „Предложенія, изложенныя въ настоящемъ сочиненіи, даны только ради удовольствія. Мудрецъ можетъ найти тысячи подобныхъ примѣровъ, или же на основаніи указанныхъ правилъ рѣшать примѣры, предложенные другими. Подобно тому, какъ солнце своимъ блескомъ затмѣваетъ звѣзды, точно также и свѣдущій можетъ затмить другихъ астрономовъ въ собраніи народа, если онъ станетъ предлагать алгебраическія задачи для рѣшеній, а тѣмъ болѣе если самъ будетъ ихъ рѣшать“.

Изъ этого бѣлаго обзора содержанія сочиненія Брамагупты видно, что его нельзя назвать руководствомъ, но тѣмъ не менѣе нѣкоторые вопросы изложены въ немъ вполне систематически и составляютъ какъ-бы вполне опредѣленный кругъ изслѣдованій. Большая часть вопросовъ, изложенныхъ въ этомъ сочиненіи, относятся къ астрономіи, но многіе также неимѣютъ къ ней непосредственнаго отношенія. Не смотря на многіе недостатки этого сочиненія оно заслуживаетъ вниманія. Въ особенности много занимался Брамагупта неопредѣленными уравненіями.

Въ сочиненіи Брамагупты особеннаго вниманія заслуживаютъ его понятія объ отрицательныхъ величинахъ и о ихъ значеніи. Онъ выражается въ слѣдующихъ словахъ: „сумма двухъ *имуцествъ* есть *имуцество*; сумма двухъ *домовъ*—*домъ*; сумма *имуцества* и *дома* равна ихъ разности, если же они равны, то она есть нуль. Сумма нуля и *дома* есть *домъ*; *имуцества* и нуля—*имуцество*; сумма двухъ нулей есть нуль“.

Далѣе, указывая правила, которымъ слѣдуетъ придерживаться при вычитаніи, Брамагупта продолжаетъ: „меньшее вычитается изъ большаго, *имуцество* изъ *имуцества*, *домъ* изъ *дома*; но если вычитываютъ большее

изъ меньшаго, то избытокъ мѣняется (т. е. знакъ). *Домъ* вычитенный изъ нуля дѣлается *имуцествомъ*, а *имуцество*—*домомъ*. *Домъ* безъ нуля остается *домомъ*, а *имуцество*—*имуцествомъ*. Если требуется вычесть изъ *дома* *имуцество* или изъ *имуцества* *домъ*, то необходимо взять ихъ сумму“.

Также весьма интересно опредѣленіе, которое даетъ Брамагупта величинѣ дѣленной на нуль. Онъ говоритъ: „*имуцество* или *домъ*, раздѣленный на нуль есть *khacchēdam*, т. е. величина, имѣющая знаменателемъ нуль“.

Изъ вышеприведеннаго видно, что Брамагупта представлялъ себѣ отрицательныя величины, какъ величины положительныя, только отсчитываемыя въ другую сторону отъ нуля. Это достойно вниманія, такъ какъ подобный взглядъ на отрицательныя величины былъ установленъ европейскими математиками много времени спустя Брамагупты.

Баскара. Познакомившись съ сочиненіями Брамагупты перейдемъ къ разсмотрѣнію сочиненій другаго индусскаго математика Баскары *), жившаго отъ 1141 г. по 1225 г., который написалъ астрономическій трактатъ подъ заглавіемъ „*Сидханташиромани*“ (*Siddhāntaśiromani* т. е. вѣнецъ одной изъ астрономическихъ системъ **). Къ этому сочиненію Баскара написалъ введеніе, состоящее изъ двухъ частей: первая заключаетъ Ариметику, заглавіе ея *Лилавати* (*Līlāvati*—красивая); вторая содержитъ Алгебру—*Биджанита* (*Bija-Ganita*—вычисленіе корней).

Сочиненія Баскары содержатъ почти тоже, что и сочиненія Брамагуп-

*) Баскару часто называютъ *Баскара-Ачарья*, по второе названіе не есть имя, а ученая степень, такъ какъ у индусовъ названіе *Ācārya* соответствовало ученой степени доктора философіи.

Баскара былъ родомъ и жилъ въ городѣ Билдурѣ въ Деканѣ.

**) Одна изъ главъ астрономическаго трактата Баскары занимается вопросомъ о шаровидности земли (*Gola Adya*), другая посвящена астрономическимъ вычисленіямъ (*Ganita Adya*).

Въ началѣ своего сочиненія Баскара дѣлаетъ слѣдующее интересное разсужденіе относительно неподвижности земли въ пространствѣ: „земной шаръ, состоящій изъ земли, воздуха, пространства и огня неподвиженъ въ пространствѣ, онъ окруженъ планетами и неподвиженъ, благодаря собственной силѣ. Подставокъ никакихъ нѣтъ. Если-бы земля нуждалась въ подпорѣ, то эта подпора необходимо также нуждалась въ другой подпорѣ и т. д. И въ концѣ концовъ все таки нужно вообразить себѣ нѣчто такое, которое держалось бы безъ подпоры. Почему же это нѣчто не можетъ быть земной шаръ, который есть одна изъ видимыхъ формъ божества?“ Далѣе Баскара продолжаетъ: „земля обладаетъ притягивательной силой, которая притягиваетъ всѣ тѣла находящіяся въ воздухѣ и имѣющія вѣсъ. Вслѣдствіе этого тѣла эти какъ бы падаютъ. Куда могла-бы упасть земля, которая окружена пространствомъ?“.

ты, но они для насъ представляютъ особенный интересъ, такъ какъ въ нихъ пояснено многое сказанное послѣднимъ. Баскара обратилъ особенное вниманіе на точность выраженій и представленій, иногда видны даже попытки и стремленіе приводить нѣчто въ родѣ доказательствъ. Кромѣ того сочиненія Баскара доступны, такъ какъ многое въ нихъ написано прозой, между тѣмъ какъ сочиненія Брамагупты всѣ написаны самыми вычурными стихами. Въ концѣ своего сочиненія Баскара указываетъ на цѣль своего труда и на его отношеніе къ пошуткамъ подобнаго рода, сдѣланными до него; къ сожалѣнію способъ выражаться Баскары, для насъ до того непонятенъ, что нельзя себѣ составить никакого представленія въ чемъ именно состояли работы его предшественниковъ. Баскара выражается въ слѣдующихъ словахъ:

„Такъ какъ сочиненія по Алгебрѣ, написанныя Брамагуптой, Кридга-рой и Падманабгой слишкомъ обширны, то я предпринялъ извлечь изъ нихъ все самое главное и составить хорошее руководство для всѣхъ, желающихъ изучить эту науку. Настоящая книга заключаетъ тысячу строкъ, въ которыхъ изложены правила и примѣры. Послѣдніе предназначены для поясненія правилъ, или же указываютъ на ихъ цѣль и приложенія, а также служатъ къ облегченію разбора отдѣльныхъ случаевъ и наконецъ иногда они поясняютъ основныя положенія. Число отдѣльныхъ случаевъ безконечно велико, а потому можно было привести только немногіе. Съ одной стороны обширное море науки для людей съ слабымъ разсудкомъ трудно переплываемо, съ другой—исполненные талантовъ не нуждаются въ дальнѣйшемъ ученіи. Искра науки, достигнувъ понятливаго ума, разгорается благодаря своей собственной силѣ. Подобно каплѣ масла, распространяющейся по водѣ, подобно тайнѣ, повѣренной злому, подобно милостинямъ, поданнымъ достойному, какъ-бы она ни была мала, точно также распространяется наука въ развитомъ умѣ, благодаря своей собственной силѣ“.

„Для людей съ свѣтлымъ умомъ легко понять, что Арифметика состоитъ изъ правила трехъ членовъ; Алгебра-же есть остроуміе, какъ я уже выше замѣтилъ въ главѣ о шарѣ. Правило трехъ членовъ составляетъ Арифметику, Алгебра же есть чистый разсудокъ. Что можетъ существовать неизвѣстнаго для понимающаго? а потому для однихъ только неразвитыхъ написано настоящее сочиненіе“.

„Для умноженія своего знанія, для укрѣпленія увѣренности въ свою душевную силу, ты долженъ читать сочиненія различныхъ математиковъ, а потомъ снова читать эти основныя начала математики, прекрасныя по языку, легко понимаемыя большинствомъ, обнимающія всю суть счисленія; они заключаютъ объясненіе основныхъ предложеній, исполнены высоты и лишены ошибокъ“.

Изъ приведенныхъ словъ Баскара видно, что до него существовало много математическихъ сочиненій. Онъ прямо указываетъ, что содержаніе своего труда онъ заимствовалъ изъ обширныхъ сочиненій по тому же предмету. Баскара былъ только собирателемъ, онъ помѣстилъ въ своемъ сочиненіи все то, что казалось ему необходимымъ, остальное онъ выбросилъ, какъ напримѣръ многіе изъ примѣровъ, приведенныхъ въ „Брама-Спутъ-Сидгантъ“.

„Сидгантациромани“ было, въ свою очередь, комментировано многими учеными, изъ числа которыхъ наиболѣе извѣстенъ Гинеза (*Ganesa*), жившій около 1545 г. Но большая часть комментаторовъ новаго ничего не прибавила, правила и основныя положенія оставались безъ измѣненія *).

Мы сначала познакомимся съ содержаніемъ Арифметики, а затѣмъ уже Алгебры Баскары.

Лилавати состоитъ изъ тринадцати главъ **).

Въ I-й главѣ помѣщено введеніе, въ которомъ приведены таблицы мѣръ протяженій, вѣса и денегъ ***).

Во II-й главѣ изложены восемь арифметическихъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ квадратъ, извлеченіе квадратнаго корня, возвышеніе въ кубъ и извлеченіе кубическаго корня. Послѣ этого слѣдуютъ дѣйствія надъ дробями и наконецъ показаны дѣйствія при посредствѣ нуля. Въ одномъ изъ отдѣловъ этой главы Баскара указываетъ правила для приведенія дробей къ одному знаменателю. Производство дѣйствій мало чѣмъ разнится отъ употребляемыхъ въ настоящее время. Произведеніе изъ двухъ равныхъ множителей Баскара, подобно другимъ индусскимъ математикамъ, называетъ *varga*—квадратъ, произведеніе трехъ равныхъ множителей *ghana*—кубъ. Понятія о квадратѣ и кубѣ у индусскихъ математиковъ не сопровождаются, какъ у древнихъ греческихъ геометровъ, представленіями о площади и объемѣ; подобныя выраженія являлись у индусовъ прямо какъ произведенія. Имъ были извѣстны выраженія:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

*) Въ настоящее время сочиненія Брамагупты и Баскары мало кому извѣстны изъ туземныхъ жителей Индостана. Въ Пунаѣ (Poona), главномъ центрѣ браминской учености, едва-можно найти нѣсколько лицъ, которымъ извѣстны „Лилавати“, „Виаганита“ и др. сочиненія. Въ школахъ ограничиваются заучиваніемъ правилъ, изложенныхъ въ „Сурій-Сидгантъ“.

**) „Лилавати“ была переведена въ 1587 г. на персидскій языкъ, по повелѣнію шаха Акбера математикомъ *Физи* (Fuzi). „Виаганита“ была также переведена на персидскій языкъ въ 1634 г. математикомъ *Рушидомъ* (Ata Allah Ruschidi ben Ahmed Nadir).

***). Сочиненіе свое Баскара начинаетъ съ того, что обращается къ божеству, голова котораго похожа на словену, и ноги котораго обожжены богами.

которые они примѣняли также при извлеченіи корней. Существовало также понятіе и о высшихъ степеняхъ. Четвертая степень называлась *varga-varga*, шестая—*ghana-varga* или *varga-ghana*, восьмая—*varga-varga-varga*, девятая—*ghana-ghana* и т. д. Пятая степень выражалась *varga-ghana-ghata*, седьмая—*varga-varga-ghana-ghata* и т. д. Безъ слова *ghata* показатели умножаются, при этомъ же словѣ они складываются. Говоря объ „Арифметикахъ“ Діофанта мы указали, что онъ степень всегда выражалъ только чрезъ сложение, индусы же употребляли сложение и умножение, смотря потому была-ли степень нечетная или четная. Пояснить это всего лучше на примѣрахъ.

Баскара писалъ:

$$a^4 = (a^2)^2, \quad a^5 = a^2 \cdot a^3, \quad a^6 = (a^3)^2, \quad a^7 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^3,$$

Діофантъ же:

$$a^4 = a^2 \cdot a^2, \quad a^5 = a^2 \cdot a^3, \quad a^6 = a^3 \cdot a^3, \quad a^7 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^3, \dots$$

Сложение индусы обозначали тѣмъ, что слагаемыя ставили рядомъ. При вычитаніи уменьшаемое ставится рядомъ съ вычитаемымъ, но надъ вторымъ ставится всегда точка. Умножение обозначали тѣмъ, что послѣ множителей ставили слово *bhavita*, т. е. *предшествующее*. Для обозначенія дѣленія ставили дѣлитель подъ дѣлимымъ, но черты не употребляли. Для обозначенія извлеченія квадратнаго корня изъ ирраціональнаго числа, передъ соотвѣствующимъ числомъ ставили слогъ *ka*, начальный слова *karanī*, т. е. ирраціональное. Такъ напримѣръ дѣйствіе $\sqrt{272} - \sqrt{26}$ индусскіе математики писали *ka 272 ka 26*.

Изъ сказаннаго видно, что почти всѣ дѣйствія индусскіе математики выражали символически словами, а не знаками. Символы свои они прилагали только къ одночленнымъ выраженіямъ, такъ какъ представленія, соотвѣтствующаго нашимъ скобкамъ еще въ то время не существовало у индусовъ. При умноженіи на нуль произведение не уничтожается, если только снова слѣдуютъ дѣйствія съ нулемъ, такъ какъ индусскіе математики говорили, что такое произведение снова восстанавливается. Дробь съ знаменателемъ равнымъ нулю Баскара считаетъ неопредѣленнымъ выраженіемъ, но одинъ изъ комментаторовъ замѣчаетъ, что истинное значеніе подобной дроби есть бесконечность *).

Глава III состоитъ изъ шести отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложены

*) Въ одной изъ задачъ второй главы Баскара обращается съ слѣдующими словами къ самой Лилавати: „Скажи мнѣ дорогая и прекрасная Лилавати, ты у которой глаза подобны глазамъ молодого оленя, какой получится результатъ отъ умноженія 135 на 12? Подъ именемъ Лилавати полагаютъ Баскара разумѣть саму Арифметику.

правила, какъ производится дѣйствія въ обратномъ порядкѣ. Правила эти Баскара прилагаетъ къ цѣлому ряду задачъ, изъ числа которыхъ мы укажемъ на слѣдующую: „найти число, которое дало-бы въ частномъ 2 послѣ производства надъ нимъ слѣдующихъ дѣйствій: сначала число умножено на 3, затѣмъ оно увеличено на $\frac{3}{4}$ этого произведенія, снова раздѣлено на

7 и уменьшено на $\frac{1}{7}$ частнаго, полученный остатокъ возвышенъ въ квадратъ, затѣмъ уменьшенъ на 52, изъ полученнаго числа извлеченъ квадратный корень, затѣмъ прибавлено 8 и наконецъ раздѣлено на 10“. Подобные вопросы въ настоящее время рѣшаются при помощи уравненій, Баскара же излагаетъ правила, при посредствѣ которыхъ всѣ дѣйствія нужно производить въ обратномъ порядкѣ, начиная съ послѣдняго и такимъ образомъ дойти до неизвѣстнаго числа. Во 2-мъ отдѣлѣ слѣдуетъ рядъ вопросовъ, который рѣшается при помощи метода, напоминающаго правило, извѣстное подъ именемъ *правила фальшиваго положенія (regula falsi)*. Изъ числа этихъ вопросовъ укажемъ на слѣдующій: „изъ пучка цвѣтовъ чистыхъ лотосовъ взяты третья, пятая и шестая части, которая соотвѣтственно приподнесены богамъ: Шивѣ, Вишнѣ и Солнцу; четвертая же часть досталась Бавани. Оставшіеся шесть лотосовъ даны многоуважаемому учителю. Скажи мнѣ немедленно число всѣхъ цвѣтковъ?“. При рѣшеніи этой задачи Баскара поступаетъ слѣдующимъ образомъ: онъ выбираетъ сначала произвольное число, дѣлящееся безъ остатка на 3, 4, 5 и 6; пусть это число будетъ 60. Взятое число не удовлетворяетъ предложенной задачѣ, такъ какъ въ остаткѣ оно даетъ 3, а не 6. Изъ этого Баскара заключаетъ, что нужно взять число вдвое большее, т. е. 120, которое и удовлетворяетъ задачѣ. Въ 3-мъ отдѣлѣ показано какъ изъ извѣстнаго сочетанія величинъ могутъ быть найдены эти величины. Вопросъ этотъ рѣшаетъ Баскара при слѣдующихъ задачахъ: по данной суммѣ и разности двухъ чиселъ найти самыя числа; а также по данной разности квадратовъ и разности чиселъ найти самыя числа по формулѣ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Въ 4-мъ отдѣлѣ даны правила, при помощи которыхъ можно отыскать два числа, коихъ сумма или же разность квадратовъ, уменьшенная на единицу, была-бы снова число квадратное. Баскара предлагаетъ три правила. По первому одно число $n = \frac{8m^2 - 1}{2m}$, а другое $\frac{n^2}{2} + 1$, и мы всегда будемъ имѣть, что $n^2 \pm \left(\frac{n^2}{2} + 1\right)^2 - 1$ равно числу квадратному. По другому приему оба числа будутъ $m + \frac{1}{2m}$ и 1, и наконецъ по третьему, они суть $8m^4 + 1$ и $8m^3$. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложено рѣшеніе уравненій вида $x \pm a\sqrt{x} = b$ и $cx \pm a\sqrt{x} = b$, при чемъ послѣднее при-

водится къ виду $x \pm \frac{a}{c} \sqrt{x} = \frac{b}{c}$. Всѣ правила Баскара поясняютъ на примѣрахъ, состоящихъ изъ дѣйствій надъ извѣстными числами для полученія неизвѣстныхъ. Въ 6-мъ отдѣлѣ изложены тройныя правила и приложеніе ихъ къ различнымъ вопросамъ торговли.

Всѣ изложенныя розысканія Баскара производятъ почти тѣми-же самими приемами и методами, которые употребительны и въ настоящее время.

Глава IV состоитъ также изъ шести отдѣловъ; она озаглавлена „розысканія относящіяся къ смѣсамъ“. Въ 1-мъ отдѣлѣ этой главы авторъ рѣшаетъ различные вопросы, относящіеся къ правиламъ процентовъ и товарищества. Во 2-мъ отдѣлѣ разбирается задача: „опредѣлить время нужное для наполненія бассейна водой, текущей въ него изъ нѣсколькихъ источниковъ, если извѣстны времена, въ которыя бассейнъ наполняется каждымъ изъ источниковъ отдѣльно“. Въ 3-мъ отдѣлѣ, озаглавленномъ „покупка и продажа“, рѣшено нѣсколько задачъ, относящихся къ вопросамъ практической жизни. Въ 4-мъ отдѣлѣ рѣшена слѣдующая задача и приведено правило для ея рѣшенія. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „изъ четырехъ ювелировъ имѣютъ, первый—8 рубиновъ, второй—10 сафировъ, третій—100 жемчужинъ и четвертый 5—алмазовъ; при встрѣчѣ каждый изъ нихъ отдаетъ остальнымъ тремъ по части своего имущества. Послѣ раздѣла части ихъ одинаковы; требуется опредѣлить стоимость имущества каждого изъ ювелировъ“. Для рѣшенія этой задачи Баскара предлагаетъ слѣдующее правило: изъ каждаго изъ чиселъ 8, 10, 100 и 5 нужно вычесть число лицъ—4; затѣмъ слѣдуетъ взять произвольное число, напр. 96, которое дѣлать на полученные остатки 4, 6, 96 и 1; полученные частныя 29, 16, 1 и 96 будутъ отношенія различныхъ стоимостей имущества ювелировъ. Въ 5-мъ отдѣлѣ изложены задачи на правило смѣшенія, а также опредѣленіе пробы золота и серебра. Въ 6-мъ отдѣлѣ Баскара занимается вопросомъ о нахожденіи числа различныхъ соединеній, но при этомъ онъ замѣчаетъ, что онъ не будетъ распространяться надъ этимъ вопросомъ, чтобы не увеличить объема своей книги.

Глава V, состоящая изъ двухъ отдѣловъ, посвящена арифметическимъ и геометрическимъ строкамъ. Въ восьми правилахъ изложено какъ находить суммы рядовъ:

$$1+2+3+4+\dots+n$$

$$1+3+6+\dots+n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

Далѣе авторъ переходитъ къ общему ряду:

$$a, a+k, a+2k, \dots, a+(n-1)k$$

и показываетъ какъ находить его сумму. Во 2-мъ отдѣлѣ показаны правила для суммированія геометрическихъ строкъ.

Глава VI содержитъ плоскую Геометрію, изложеніе которой мало отличается отъ находящагося въ сочиненіи Брамагупты, сдѣланы только незначительныя дополненія. Объ этой главѣ мы уже имѣли возможность говорить выше, въ началѣ настоящаго сочиненія. Въ началѣ этой главы Баскара, подобно Брамагуптѣ, занимается прямоугольными треугольниками, при чемъ пифагорова теорема приведена какъ вполне очевидное предложеніе (см. стр. 11). Затѣмъ приведено нѣсколько примѣровъ, въ которыхъ показано, какъ по двумъ даннымъ сторонамъ прямоугольнаго треугольника отыскивается третья сторона; при этомъ числа такъ подобраны, что результатъ всегда получается число рациональное. Если катеты равны, то гипотенуза иррациональна; при этомъ Баскара показываетъ какъ отыскивается корень числа въ этомъ случаѣ. Правило предложенное Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: если требуется извлечь корень изъ $\frac{169}{8}$, то умножаютъ числитель на произведеніе изъ 8 и четной степени 10, напр. 10000; полученное произведеніе есть 23520000, приближенный корень этого выраженія 3677, а потому $\sqrt{\frac{169}{8}} = \frac{3677}{800} = 4\frac{477}{800}$. Подобный приемъ употребляется и въ настоящее время для извлеченія корней изъ чиселъ по приближенію. Затѣмъ слѣдуютъ предложенія и правила, относящіеся къ составленію прямоугольныхъ треугольниковъ, коихъ стороны выражаются рациональными числами. Изъ числа подобныхъ предложеній укажемъ на слѣдующія:

$$2ab+(a-b)^2=a^2+b^2 \quad \text{и} \quad (a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Далѣе слѣдуетъ цѣлый рядъ правилъ, изложенныхъ въ очень наглядной формѣ и поясненныхъ примѣрами, относящихся къ вычисленію прямоугольныхъ треугольниковъ, когда извѣстны сумма или разность гипотенузы и одного изъ катетовъ и другой катетъ, или-же подобное соотношеніе между катетами и гипотенузой. Изъ числа такихъ примѣровъ укажемъ на слѣдующій: „Бамбуковая трость 32-хъ футовъ вышины переломлена вѣтромъ; вершина трости касается поверхности земли на разстояніи 16 футовъ отъ основанія. Скажи мнѣ математикъ, на какомъ разстояніи отъ основанія переломалась трость?“ По правилу части трости равны: одна $\frac{1}{2}\left(32 + \frac{16^2}{32}\right)$,

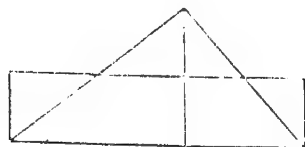
а другая $\frac{1}{2}\left(32 - \frac{16^2}{32}\right)$, или же 20 и 12. Приведенная задача извѣстна въ математикѣ подъ именемъ „задачи о бамбуковой трости“. Другая изъ задачъ рѣшенныхъ Баскарой состоитъ въ слѣдующемъ: „Въ одномъ озерѣ росъ цвѣтокъ лотоса и возвышался на полъ фута надъ водой; вѣтромъ его

отнесло въ сторону и онъ скрылся подъ водой на разстояніи двухъ футовъ отъ своего первоначальнаго мѣста. Вычисли скоро математикъ глубину воды?" Подобныя задачи были извѣстны еще Брамагуптѣ.

Затѣмъ слѣдуетъ рѣшеніе такой задачи: „Двѣ бамбуковыя трости, стоящія перпендикулярно къ поверхности земли, находятся на нѣкоторомъ разстояніи одна отъ другой. Вообразивъ себѣ линіи, проведенныя изъ вершинъ къ противоположащимъ основаніямъ, требуется опредѣлить отрѣзки, на которыя разсѣкается прямая, соединяющая основанія, перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ на линію соединяющую основанія, а также опредѣлить и величину самаго перпендикуляра?“. Если m и n высоты тростей, а a разстояніе между ихъ основаніями, то величина перпендикуляра будетъ $\frac{m \cdot n}{m+n}$, а величина отрѣзка при m равна $\frac{am}{m+n}$, а при n равна $\frac{an}{m+n}$. Для нахождения этихъ выраженій нужно прежде всего выразить отрѣзки чрезъ высоту, а потомъ сложить полученныя выраженія. Подобное правило было уже указано Брамагуптой при опредѣленіи высоты треугольника, образованнаго отъ пересѣченія двухъ противоположащихъ сторонъ четырехугольника.

Мы уже выше сказали, что Баскара во многихъ мѣстахъ своего сочиненія старается быть точнѣе Брамагупты, онъ начинаетъ вводить уже кое какія положенія, такъ напримѣръ онъ говоритъ, что сумма двухъ сторонъ треугольника болѣе третьей. Затѣмъ Баскара находитъ выраженіе для площади треугольника, которую онъ полагаетъ равной половинѣ произведенія основанія на высоту. Приѣмъ тотъ же, что и примѣненный Брамагуптой. Одинъ изъ комментаторовъ Баскары, Ганеза, даетъ слѣдующее доказательство при нахожденіи площади треугольника: на основаніи треугольника онъ строитъ прямоугольникъ (фиг. 4),² котораго высота равна половинѣ высоты

Фиг. 4.



треугольника. Такое построеніе дѣйствительно приводитъ къ цѣли если только доказать равенство площадей маленькихъ треугольниковъ, отсѣченныхъ отъ прямоугольника, съ двумя маленькими треугольниками, отсѣченными отъ большаго треугольника верхнимъ основаніемъ прямоугольника. Но

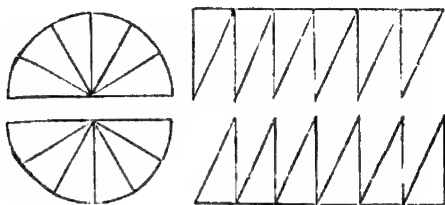
доказывать равенство этихъ треугольниковъ индусскіе математики считали излишнимъ. Они полагали, что это вполне очевидно изъ чертежа, а потому вполне достаточно. Ганеза ограничивается тѣмъ, что рядомъ съ чертежемъ, соотвѣствующимъ этому построенію, пишетъ слово „смотри“.

Отъ треугольниковъ Баскара переходитъ къ четырехугольникамъ, при чемъ онъ замѣчаетъ, что для опредѣленія четырехугольника недостаточно четырехъ сторонъ, но необходима еще діагональ; изъ этого можно заключить, что Баскара имѣлъ въ виду не только вписанные въ кругъ четырехугольники, но вообще всякіе четырехугольники. Относительно выраженій для площадей треугольника и четырехугольника въ функціи сторонъ Баскара замѣчаетъ, что древніе математики неправильно примѣняли ихъ ко всякимъ четырехугольникамъ и что онѣ только приближенны. Справедливость этихъ выраженій для четырехугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ, также повидимому неизвѣстна Баскарѣ. При вычисленіи различныхъ частей четырехугольниковъ Баскара не ограничивается раціональными числами, онъ беретъ также и ирраціональныя, изъ чего можно заключить, что онъ стремился обобщить нѣкоторыя изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой. Дѣлая такія обобщенія Баскара часто впадаетъ въ ошибки, что подало поводъ многимъ изъ новѣйшихъ математиковъ раздѣлять мнѣніе о томъ, что Баскара многія изъ предложеній, данныхъ Брамагуптой, не понималъ. Также заслуживаетъ вниманія въ этой главѣ правило данное Баскарой для нахожденія площади четырехугольника, разложеніемъ четырехугольника на два треугольника. Приѣмъ этотъ вполне принадлежитъ Баскарѣ.

Далѣе Баскара занимается нахожденіемъ площади и окружности круга. Для отношенія окружности къ діаметру онъ даетъ сначала точное выраженіе $\frac{3927}{1250}$, а затѣмъ приближенное въ видѣ $\frac{22}{7}$. Примѣняя первое выраженіе для π , длина окружности выразится чрезъ $2 \frac{3927}{1250} r$, а примѣняя второе — $2 \frac{22}{7} r$. Одинъ изъ комментаторовъ, Ганеза, въ своихъ толкованіяхъ указываетъ, какъ было найдено выраженіе $\pi = \frac{3927}{1250}$. Онъ говоритъ, что зная сторону правильнаго вписаннаго въ кругъ шестиугольника были вычислены послѣдовательно стороны 12-ти, 24-хъ, ... и 384-хъ-угольниковъ, послѣдовательнымъ дѣленіемъ соотвѣствующихъ дугъ пополамъ. Подобный приѣмъ, какъ извѣстно, былъ примѣненъ также Архимедомъ и Итоломеемъ, а потому на основаніи этого нѣкоторые математики утверждаютъ, что многія изъ своихъ познаній въ Геометріи индусскіе математики заимствовали изъ греческихъ геометровъ. Весьма интересенъ приѣмъ, помощью котораго Ганеза находитъ площадь круга, которую онъ полагаетъ равной площади

прямоугольника, построенного на радиусе и половине длины окружности. Вместо всяких разсуждений и доказательств Ганеза довольствуется следующим построением, которое онъ поясняет однимъ словомъ „смотри“ (фиг. 5).

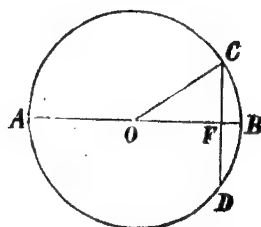
Фиг. 5.



Приемъ Ганези состоитъ въ слѣдующемъ: площадь круга онъ разбиваетъ на секторы; затѣмъ кругъ раздѣливаетъ по диаметру пополамъ, а каждую изъ половинокъ снова раздѣливаетъ столько разъ, сколько въ ней секторовъ. Раздѣляя полукруги, онъ ихъ выправляетъ и получаетъ двѣ фигуры, имѣющія сходство съ пилами. Площади этихъ двухъ пилъ тождественны и сумма ихъ равна площади круга. Обѣ пилы составляютъ прямоугольникъ, основаніе, котораго равно половине окружности данного круга, а высота равна радиусу. Изъ этого онъ заключаетъ, что площадь круга равна половине произведения окружности на радиусъ. Подобный методъ доказательства вполне въ духѣ индусскихъ геометровъ, для которыхъ, какъ мы выше замѣтили, исходною точкою при всѣхъ доказательствахъ справедливости предложеній служило начало наглядности или очевидности.

Баскара даетъ также правила для нахождения поверхности и объема шара, чего нѣтъ въ сочиненіи Брамагуны. Одинъ изъ комментаторовъ го-

Фиг. 6.



ворить, что при нахожденіи объема шара, слѣдуетъ разсматривать шаръ, какъ состоящій изъ иглоподобныхъ пирамидъ, вершины которыхъ сходятся въ центрѣ шара, а основанія лежатъ на поверхности шара. Въ слѣдующихъ предложеніяхъ этой главы показано соотношеніе между хордой, диа-

метромъ и высотой сегмента круга. Называя чрезъ d диаметръ AB круга, чрезъ s —хорду CD и чрезъ x —высоту FB сегмента (фиг. 6), или какъ ее называли индусы *utkrāmajyā*, т. е. *стрѣла*, Баскара находитъ выраженіе:

$$\frac{s^2}{4} = dx - x^2 \quad (1)$$

или

$$s = 2\sqrt{x(2r - x)}$$

По даннымъ двумъ изъ величинъ входящихъ въ это выраженіе Баскара даетъ выраженіе для третьей. Изъ числа геометрическихъ предложеній этой главы укажемъ еще на выраженія хорды въ функціи дуги и обратно, которыя были вѣроятно найдены эмпирически. Обозначивъ чрезъ s —хорду, c —окружность, a —дугу и d —диаметръ, формулы имѣютъ слѣдующій видъ:

$$s = \frac{4d(c-a)a}{c^2 - (c-a)a} \quad \text{и} \quad a = \frac{c}{2} - c\sqrt{\frac{d-s}{s+4d}}$$

Выраженія эти точны до вторыхъ десятичныхъ знаковъ, а потому представляютъ довольно грубую степень приближенія, но тѣмъ не менѣе онѣ интересны въ томъ отношеніи, что при помощи ихъ были вѣроятно вычислены первыя таблицы синусовъ.

Выраженіе (1) встрѣчается также въ сочиненіяхъ Брамагуны, только въ иномъ видѣ, онъ опускаетъ членъ x^2 . Такое допущеніе возможно только при очень малой величинѣ x . Въ такомъ видѣ выраженіе это представляетъ предложеніе, извѣстное уже Ариабаттѣ, что квадратъ полухорды равенъ произведенію отрезковъ диаметра перпендикулярнаго этой хордѣ. Если допустить, что индусскимъ геометрамъ было извѣстно предложеніе, что всякій уголъ вписанный въ полуокружность прямой, то справедливость предложенія извѣстнаго Ариабаттѣ легко было обнаружить.

Главы VII, VIII, IX и X относятся къ измѣренію объемовъ тѣлъ при рѣшеніи различныхъ практическихъ вопросовъ. Изложеніе тоже, что и въ сочиненіи Брамагуны. Поименованныя главы очень коротки и не заключаютъ ничего интереснаго.

Глава XI озаглавлена „тѣнь гномона“. Въ этой главѣ Баскара занимается вопросомъ объ измѣреніи при помощи тѣней. Называя чрезъ g высоту гномона, h —высоту свѣтящейся точки, d —разстояніе основанія источника свѣта отъ гномона и l —длину тѣни, изъ подобія треугольниковъ найдемъ слѣдующее соотношеніе между этими величинами:

$$lh = gd + gl$$

По даннымъ тремъ изъ величинъ l , h , d и g можно всегда найти четвертую; для этой цѣли Баскара даетъ правила.

Въ заключеніи главы онъ говоритъ: „Подобно высшему существу, которое избавляетъ своихъ почитателей отъ страданій и которое есть единственная причина сотворенія міра, все проникающее и все обнимающее, въ его различныхъ проявленіяхъ, какъ то: въ видѣ міровъ, раевъ, рѣкъ, горъ, боговъ, чертей, людей, деревьевъ и городовъ, точно также и настоящее собраніе предписаній проникнуто и обнимается правиломъ трехъ членовъ. Но если это есть простое основаніе, то почему же оно съ такимъ трудомъ столькими писателями такъ обстоятельно излагается? Отвѣтъ слѣдующій: все то, что всегда вычисляется въ Алгебрѣ или Ариметикѣ при посредствѣ одного множителя или дѣлителя, глубокіе ученые принимаютъ за правило трехъ членовъ. Однако, свѣдущими наставниками оно было раздѣлено на различныя и разнообразныя правила; они излагали эти видоизмѣненныя, болѣе простыя, правила, думая чрезъ это поднять уровень образованія немногихъ избранныхъ, подобныхъ намъ“.

Глава XII занимается рѣшеніемъ нѣкоторыхъ неопредѣленныхъ вопросовъ въ цѣлыхъ числахъ, но такъ какъ объ этомъ Баскара трактуетъ болѣе подробно въ своей Алгебрѣ, то мы на этой главѣ неостановимся.

Глава XIII—последняя. Въ этой главѣ говорится о различныхъ соединеніяхъ, сначала о перемѣщеніяхъ, а потомъ и о сочетаніяхъ. Выраженія, показывающія число различныхъ перемѣщеній и сочетаній вполне вѣрны, изъ чего можно заключить, что съ этимъ вопросомъ индусскіе математики были вполне основательно знакомы.

Вопросъ о различныхъ сочетаніяхъ является у индусовъ очень древнимъ. Первые слѣды его нѣкоторые ученые видятъ въ двадцати четырехъ именахъ Вишну, которыя онъ носитъ смотря по тому порядку въ какомъ онъ держитъ въ своихъ четырехъ рукахъ дубину, цѣль, цвѣтокъ лотоса и раковину. Особенное значеніе имѣлъ вопросъ о числѣ различныхъ сочетаній и перемѣщеній въ индусской просодіи, гдѣ перечисляются всѣ возможные случаи образованія стиховъ, состоящихъ изъ одинаковаго числа слоговъ, въ зависимости отъ долготы и краткости отдѣльныхъ слоговъ *). Хотя Баскара даетъ правила для нахождения числа различныхъ соединеній и сочетаній безъ всякихъ доказательствъ, но тѣмъ не менѣе онъ заслуживаетъ особеннаго вниманія, такъ какъ извѣстно, что вопросъ этотъ былъ почти совершенно чуждъ древнимъ греческимъ геометрамъ и имолѣ принадлежитъ индусамъ у которыхъ онъ получилъ вѣроятно свое первоначальное развитіе **).

*) Интересныя указанія по этому вопросу можно найти въ статьѣ: „*Albr. Weber, Ueber die Metrik der Inder*“, помѣщенной въ „*Indische Studien*“, Т. VIII pag. 326—328 и 425.

**) Есть указанія, что вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ былъ извѣстенъ древ-

Въ концѣ своей Ариметики Баскара говоритъ слѣдующее: „Счастіе и радость, безъ сомнѣній, будутъ постоянно возрастать въ этомъ мірѣ для тѣхъ, которые посвятили себя благородному искусству Лилавати; прекрасно составлены всѣ ея части, чисты и совершенны ея рѣшенія и изященъ ея языкъ *)“.

Познакомившись вкратцѣ съ содержаніемъ ариметическаго сочиненія Баскары, перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію второй части „Сидгантациромани“, которая заключаетъ Алгебру или какъ Баскара ее называетъ „Віаганита“, т. е. „вычисленіе корней“.

Віаганита. Въ введеніи къ своему сочиненію Баскара опредѣляетъ предметъ Алгебры въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

„Я почитаю невидимое первобытное существо, о которомъ говорятъ лангиасы (ученые), что оно есть источникъ познавательной способности, которой обладаютъ всѣ одушевленные существа и которая служитъ къ ихъ развитію; оно есть единственное основаніе всего видимаго. Я молю управляющую силу, которая считается мудрецами, знакомыми съ природой, началомъ всѣхъ познаній, такъ какъ она есть единственное начало всего видимаго. Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые съ ней видятъ въ ней средство къ пониманію всего существующаго; она есть основаніе всего видимаго“.

„Такъ какъ дѣйствія надъ извѣстными величинами, какъ мы уже видѣли, были основаны на дѣйствіяхъ при помощи неизвѣстныхъ величинъ и такъ какъ рѣшеніе вопросовъ можетъ быть понято весьма немногими, и совершенно непонято людьми слабо одаренными отъ природы, то я предпринялъ, въ настоящее время, изложить и разобрать сущность Алгебры или анализа“.

Вопросъ этотъ былъ извѣстенъ *Аристотелю* и былъ примененъ ученикомъ его *Аристоксеномъ* изъ Тарента къ нахожденію числа возможныхъ соединений извѣстныхъ элементовъ. Кромѣ того вопросъ о соединеніяхъ и сочетаніяхъ занималъ *Ксенократа*, стоика *Хрисиппа* (282—209 гг. до Р. Х.), а также, по словамъ Платарха, *Гиппарха*. Когда жилъ послѣдній Платархъ ничего не говоритъ, онъ упоминаетъ только, что Гиппархъ этотъ „принадлежалъ къ числу ариметиковъ“. Весьма вѣроятно, что это извѣстный астрономъ Гиппархъ, жившій между 161 и 126 гг. до Р. Х. Такое предположеніе еще тѣмъ заслуживаетъ вниманія, что по словамъ нѣкоторыхъ арабскихъ писателей Гиппархъ написалъ сочиненіе „О квадратныхъ уравненіяхъ“, объ этомъ мы уже упоминали (см. стр. 237). Астрономъ Гиппархъ былъ родомъ изъ Никей, въ Битиніи; онъ производилъ свои наблюденія на островѣ Родосѣ (объ Гиппархѣ см. стр. 111—112).

*) Сочиненія Баскары пользовались большою извѣстностью у индусскихъ ученыхъ, такъ какъ онъ были комментированы многими учеными. Изъ числа такихъ комментаторовъ болѣе извѣстны: *Гамадхара* (Gangadhara), жившій около 1420 г.; *Сурядаза* (Suryadāsa)—около 1540; *Ганеза* (Ganeṣa)—около 1545; *Ранганата* (Ranganātha)—около 1640; *Рамакришна* (Rama-Krishna); *Кришна-Бхатта* (Krishna-Bhatta). Время, когда жили послѣдніе два комментатора неизвѣстно.

Сочинение Баскары состоит из восьми глав, с содержанием которых мы теперь познакомимся.

Глава I озаглавлена „36 действий“ (*śat-trimśat pari-karmāni*). Она состоит из пяти отделов, из которых первый подразделяется снова на два. Отделы эти содержат:

- 1-й и 2-й — шесть действий надъ плюсомъ и минусомъ (*śadvidham dhana-rna*).
- 3-й — шесть действий надъ нулемъ (*śadvidham kha*).
- 4-й — шесть действий надъ неизвѣстнымъ (*śadvidham avyakta*).
- 5-й — шесть действий надъ нѣсколькими неизвѣстными (*śadvidham aneka-varna*).
- 6-й — шесть действий надъ иррациональными величинами (*śadvidham karani*).

Подъ именемъ *шести действий* Баскара понимаетъ сложение, вычитание, умножение, дѣление, возвышеніе въ степень и извлечение корней.

Первый изъ поименованныхъ отделовъ кромѣ различныхъ примѣровъ содержитъ правила—*sūtras*, изложенныя въ стихотворной формѣ. Правила эти состоятъ въ слѣдующемъ:

- 1) При сложении складываютъ двѣ *потери* или два *имущества*; разность между *выигрышемъ* и *домомъ* равна ихъ суммѣ.
- 2) Правило при вычитаніи: *имущество* дѣлается *домомъ*, *домъ*—*имуществомъ*; затѣмъ производятъ сложение какъ указано.
- 3) Произведение двухъ *имуществъ* или же двухъ *неимуществъ* есть *имущество*; произведение *имущества* и *дома* есть *домъ*. Тоже правило имѣетъ мѣсто при дѣленіи.
- 4) Квадратъ *имущества* или *дома* есть *имущество*; *имущество* имѣетъ два корня, одинъ въ видѣ *выигрыша*, другой въ видѣ *дома*. Корень изъ *дома* не существуетъ, такъ какъ послѣдній не есть квадратъ.

Изъ приведенныхъ правилъ видно, что Баскара положительнымъ величинамъ—*dhana* придаетъ значеніе *имущества*, *богатства*, *выигрыша*; отрицательнымъ же—*gṇat* значеніе *дома*, *потери*. Кромѣ того правила эти указываютъ вполнѣ ясно, что Баскара имѣлъ понятіе о двойномъ знакѣ при радикалѣ второй степени.

Третій отдѣлъ посвященъ действиямъ надъ нулемъ. Баскара говоритъ: „увеличенные или уменьшенные на нуль имущество и долгъ остаются безъ измѣненія; вычтенные изъ нули они принимаютъ обратное значеніе“ (т. е. долгъ дѣлается имуществомъ, а имущество долгомъ). Изъ сказаннаго видно, что Баскара представлялъ себѣ отрицательное количество, какъ количество положительное, только отсчитываемое внизъ отъ нуля.

Далѣе Баскара говоритъ: „дѣлимое 3; дѣлитель 0; результатъ дѣ-

ленія $\frac{3}{0}$, который есть бесконечность, называется частное отъ нуля. Онъ не претерпѣваетъ измѣненій. Величина, которую называютъ „частное отъ нуля“, не можетъ ни увеличиться, ни уменьшиться, какія-бы большія сложенія или вычитанія мы не производили, подобно тому какъ ко времени, не имѣющему ни начала, ни конца, цѣлыя серіи существованій (бытіе)².

Изъ содержанія поименованныхъ трехъ отделовъ первой главы мы видимъ, что Баскара имѣлъ вполнѣ ясное представленіе объ положительныхъ и отрицательныхъ количествахъ и объ ихъ различіи. Онъ зналъ, что корень квадратный имѣетъ два значенія—одно положительное, другое отрицательное; что нельзя извлечь корень квадратный изъ отрицательнаго числа. Ему было также извѣстно, что дробь, которой знаменатель нуль, бесконечно велика; что произведение двухъ отрицательныхъ чиселъ есть число положительное, а произведение положительнаго числа и отрицательнаго—число отрицательное. Впрочемъ необходимо замѣтить, что послѣднія правила были извѣстны еще Ариабаттѣ.

Въ 4-мъ отдѣлѣ показаны действия надъ буквенными величинами и даны примѣры на числахъ, и наконецъ въ 5-мъ отдѣлѣ показаны действия надъ иррациональными величинами.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о томъ какъ обозначали индусскіе математики неизвѣстныя и извѣстныя величины, а также уравненія.

Неизвѣстную величину они называли *yavat-tavat*, что соответствуетъ латинскому выраженію *tantum-quantum* *). Для обозначенія неизвѣстной величины *x* служилъ знакъ $\overline{\text{CT}}$, соответствующій слогу *ya*. Квадратъ неизвѣстной величины, т. е. x^2 , они обозначали знакомъ $\overline{\text{CT}} \overline{\text{CT}}$, который соответствуетъ сокращенному слову *varga*. Если приходилось имѣть дѣло съ нѣсколькими неизвѣстными величинами, напр. *x*, *y*, *z*, . . . , то индусскіе математики различали ихъ по цвѣтамъ **), обозначая одну неизвѣстную знакомъ $\overline{\text{CT}}$ —*ka* (*kāla*—черная), другую знакомъ $\overline{\text{CT}}$ —*ni* (*nilāca*—голубая), третью знакомъ $\overline{\text{CT}}$ —*pi* (*pilāca*—желтая), четвертую знакомъ $\overline{\text{CT}}$ —*lo* (*lōhitāca*—красная) и т. д. Коэффициенты ставились всегда позади неизвѣстнаго, рядомъ съ нимъ. Извѣстная величина сопровождалась всегда словомъ

*) Роде высказываетъ предположеніе, что терминъ *yavat-tavat*, обозначающій неизвѣстное и соответствующій термину *tantum-quantum*, есть ничто иное какъ переводъ на санскритскій языкъ греческаго $\alpha\rho\theta\rho\iota\varsigma$, которое само есть переводъ египетскаго *hn* (*hau*)—*куна*, означающимъ неизвѣстную величину въ папирусь Ринда (см. стр. 333).

**) Обозначеніе неизвѣстныхъ величинъ названіями цвѣтовъ своимъ происхожденіемъ вѣроятно обязано тому, что на санскритскомъ языкѣ буквой носили названія цвѣтовъ.

тура, что означает *определенное число*. Знака равенства въ уравненіяхъ не существовало, а обѣ части уравненія писали одну подъ другой.

Для поясненія изложеннаго мы считаемъ не безынтереснымъ привести уравненіе, заимствованное нами изъ сочиненія Баскары. Вотъ это уравненіе:

याव२	यां ?	नू३०	ya bha 2	ya 1	ru 30
याव०	या०	नू८	ya bha 0	ya 0	ru 8

уравненіе это, написанное настоящимъ алгебраическимъ языкомъ будетъ имѣть видъ:

$$2x^2 - x + 30 \\ = 0x^2 + 0x + 8$$

или же написанное въ общепотребительной формѣ, оно приметъ видъ:

$$2x^2 - x + 30 = 8$$

Глава II содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени (*cuttuca d'hyaya*). Глава эта есть дальнѣйшее развитіе, сказаннаго въ двѣнадцатой главѣ „Лилавати“ *).

Мы уже выше видѣли, что рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій первой степени было извѣстно еще Аріабгаттѣ. Въ сочиненіи Баскары всѣ неопредѣленные уравненія первой степени предложены для рѣшеній въ формѣ $\frac{ax+b}{c} = y$, при чемъ требуется опредѣлить x въ цѣлыхъ числахъ такъ, чтобы $ax+b$ дѣлилось-бы безъ остатка на c , т. е. чтобы y было число цѣлое.

Глава III содержитъ рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій второй степени (*varga pariti*). Глава эта состоитъ изъ трехъ отдѣловъ. Въ 1-мъ отдѣлѣ изложенъ приѣмъ для рѣшенія уравненій формы $ax^2+1=y^2$, при чемъ a коэффициентъ, 1—слагаемое, x —меньшій корень, а y большій. Методъ состоитъ въ слѣдующемъ: если найдено послѣдовательными пробами рѣшеніе $x=n$ и $y=m$, то будутъ также удовлетворять и $x=2mn$ и $y=an^2+m^2$, или если найдены два рѣшенія $x=n$, $y=m$ и $x=p$, $y=q$ то $x=mp \pm nq$ и $y=ap \pm mq$ будутъ новыя значенія, которыя также удовлетворяютъ уравненію. Справедливость сказаннаго показано Баскарой на примѣрахъ, но доказательства онъ не приводитъ. Такъ какъ указанный приѣмъ приводитъ къ цѣли только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, то

*) Обѣ главы носятъ одно и то же заглавіе. Кольбрукъ озаглавилъ ихъ *Pulverizer*, т. е. *размезаніе*.

Баскара во 2-мъ отдѣлѣ даетъ болѣе общій приѣмъ, извѣстный подъ именемъ *циклическаго*. Въ 3-мъ отдѣлѣ этой главы рѣшены различныя задачи.

Неопредѣленные уравненія второй степени являются всегда у индусскихъ математиковъ подѣ видомъ $ay^2+t=x^2$, къ которому они всегда умѣютъ ихъ сводить. Извѣстно, что Діофантъ умѣлъ рѣшать подобныя уравненія въ рациональныхъ числахъ, но только для частныхъ значеній $a=a^2$ и $t=c^2$, индусскіе же математики предложили *общій приѣмъ* для рѣшенія уравненія $ay^2+1=x^2$ въ цѣлыхъ числахъ. Уравненіе это и въ настоящее время имѣетъ важное значеніе въ теоріи квадратныхъ формъ. Излагать въ чемъ состоялъ циклическій методъ мы не будемъ, такъ какъ это отвлекло бы насъ слишкомъ далеко, замѣтимъ только, что весь приѣмъ основанъ на замѣчаніи, что если p и q суть рѣшенія уравненія $aq^2+t=p^2$, а p' и q' рѣшенія уравненія $aq'^2+t'=p'^2$, то $y=pq' \pm qp'$ и $x=pp' \pm aqq'$ будутъ тождественныя рѣшенія уравненія $ay^2+t'=x^2$.

Циклическій методъ замѣчательнъ по глубинѣ мысли и тонкости приѣмовъ *). По выраженію Ганкеля, приѣмъ этотъ принадлежитъ къ числу самыхъ тонкихъ изслѣдованій, сдѣланныхъ въ теоріи чиселъ до Лагранжа. Приѣмъ индусскихъ математиковъ былъ снова найденъ Лагранжемъ въ 1769 г. **). Задача, которою занимались индусы была снова впервые предложена Ферма въ 1657 г. и рѣшена англійскимъ математикомъ лордомъ Брунckerомъ (*Brouncker*). Впослѣдствіи задачей этой снова занялся Эйлеръ и свелъ ее на разложеніе въ непрерывныя дроби ***). Въ настоящее время рѣшеніе уравненія $ay^2+1=x^2$ извѣстно въ Анализѣ подъ именемъ *задачи Пелля* (*Pell*), хотя она была извѣстна уже до него. Доказательства циклическаго приѣма индусскіе математики не дали, такъ какъ давать доказательства вообще они считали излишнимъ, вѣроятно это входило въ устное преподаваніе ихъ ученыхъ. Также ими не было доказано, что приѣмъ этотъ всегда годится если a число не квадратное; доказать это пытался уже Валлисъ ****), но успѣлъ въ этомъ только Лагранжъ.

Рѣшеніе уравненій формы $ax^2+b=cu^2$ указываетъ, что Баскарѣ были извѣстны такъ называемыя *квадратичныя вычеты* и *кубическіе вычеты*.

Глава IV содержитъ рѣшеніе уравненій первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. При помощи уравненій рѣшается много вопросовъ, которыя

*) Сущность циклическаго метода изложена въ сочиненіи: *Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig. 1874. in-8. pag. 200—205.

**) *Sur la solution d'un problème indéterminé du 2 degré*. Mémoires de l'Académie de Berlin. 1769. T. XXIII.

***) *De usu novi algorithmi*. Novi Comment. Petrop. 1767. T. XI.

****) *Wallis, Opera mathem.* T. II. *Commercium epist.* Ep. 9, 14, 17, 18, 19, 46; а также въ его „Алгебрѣ“, С. 98, 99.

были уже разобраны въ Ариѳметикѣ Баскары. Правильно указано немного, отдѣльные случаи пояснены на частныхъ примѣрахъ. Мы уже выше упомянули, что всякое уравненіе первой степени формы:

$$6x + 300 = 10x - 100$$

индусскіе математики писали въ видѣ:

$$ya\ 6\ ru\ 300$$

$$ya\ 10\ ru\ 100$$

если же казогонибудь члена не доставало, въ уравненіяхъ написанныхъ въ такой формѣ, напр. уравненіе:

$$6x = 24$$

то недостающіе члены замѣщали нулемъ, т. е. писали уравненіе въ формѣ:

$$ya\ 6\ ru\ 0$$

$$ya\ 0\ ru\ 24$$

Рѣшеніе уравненій получается вычитая одинъ рядъ изъ другаго; такимъ образомъ для перваго изъ написанныхъ уравненій мы будемъ имѣть:

$$ya\ 4\ ru\ 400$$

откуда слѣдуетъ, что *ya* равно *ru* 100. Въ послѣднемъ видѣ и даются рѣшенія уравненій.

Нѣкоторые изъ вопросовъ этой главы сводятся на рѣшеніе уравненій со многими неизвѣстными, а другіе на рѣшеніе неопредѣленныхъ уравненій. Изъ числа послѣднихъ укажемъ на вопросы, которые сводятся на рѣшеніе уравненій вида $Ax^2 = Bx$ и $Ax^3 = Bx^2$; уравненія эти Баскара, подобно Діофанту, причисляетъ къ числу уравненій первой степени. Нѣкоторые изъ уравненій этой главы напоминаютъ своими рѣшеніями остроумные приемы Діофанта; многіе вопросы Баскара рѣшаетъ не менѣе искусственно и просто, при этомъ рѣшеніе нѣкоторыхъ изъ нихъ онъ приписываетъ болѣе древнимъ писателямъ. Изъ числа вопросовъ этой главы укажемъ на слѣдующее уравненіе съ двумя неизвѣстными, которое сводится къ рѣшенію уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ. Задача состоитъ въ слѣдующемъ: „Нѣкто сказалъ своему пріятелю: другъ мой, дай мнѣ 100 и я буду вдвое богаче тебя! второй отвѣтилъ: если ты мнѣ дашь 10, то я буду въ шесть разъ богаче тебя! Спрашивается сколько имѣетъ каждый?“ Баскара полагаетъ, что первый имѣетъ $2x - 100$, а второй $x + 100$; такое положеніе удовлетворяетъ первой части вопроса; затѣмъ онъ полагаетъ $2x - 110 = 6(x + 110)$, откуда $x = 70$, а потому $2x - 100 = 40$ и $x + 100 = 170$.

Въ одномъ изъ неопредѣленныхъ вопросовъ этой главы различные предметы обозначены начальными буквами своихъ названій, что подало

мысль нѣкоторымъ ученымъ видѣть въ этомъ первое начало употребленія буквъ, вмѣсто чиселъ, при производствѣ ариѳметическихъ операций. Но едва-ли такое мнѣніе заслуживаетъ вниманія. Кромѣ того многіе изъ вопросовъ этой главы напоминаютъ задачи, рѣшенныя Діофантомъ въ VI-й книгѣ „Ариѳметикъ“, такъ напримѣръ: „найти прямоугольный треугольникъ, въ которомъ величина гипотенузы выражалась тѣмъ же числомъ, что и площадь“; полагая гипотенузу, высоту и основаніе соответственно равными: $(m^2 + n^2)x$, $2mnx$ и $(m^2 - n^2)x$; требуется чтобы $(m^2 + n^2)x = mn(m^2 - n^2)x^2$, т. е. находимъ:

$$x = \frac{m^2 + n^2}{mn(m^2 - n^2)}.$$

Другая задача: „найти прямоугольный треугольникъ, коего площадь выражалась тѣмъ же числомъ, что и произведеніе сторонъ“. Или же, „найти два числа, такихъ свойствъ, чтобы ихъ сумма, а также ихъ разность были квадраты, произведеніе же было кубъ“. Полагая одно число $(m^2 + n^2)x^2$, другое $2mnx^2$, удовлетворимъ двумъ первымъ требованіямъ вопроса; третье условіе требуетъ, чтобы $2mn(m^2 + n^2)x^4$ было кубъ. „Найти два числа, коихъ сумма кубовъ была бы квадратъ, а сумма квадратовъ—кубъ“. Многіе вопросы этой главы рѣшены въ умѣ, безъ всякихъ вычисленій, съ большимъ умѣніемъ. Извѣстно, что индусскіе ученые еще до настоящаго времени поражаютъ европейцевъ умѣніемъ быстро производить въ умѣ самыя сложныя вычисленія *).

Изъ числа уравненій первой степени, рѣшенныхъ Баскарой, укажемъ на слѣдующія, находящіяся въ третьей главѣ „Лилавати“. Уравненія эти мы приводимъ, чтобы читатель могъ себѣ составить понятіе о формѣ, въ которой индусскіе математики предлагали вопросы для рѣшеній. Задачи эти слѣдующія: „пятая часть числа пчелъ роя сѣла на цвѣтокъ кадамба, третья—на цвѣтокъ силинда. Утроенная разность послѣднихъ двухъ чиселъ полетѣла на цвѣты кутал; кромѣ того осталась еще одна пчела, которая летаетъ то назадъ, то впередъ, будучи привлечена прекраснымъ запахомъ жасмина и пандамуса. Скажи мнѣ восхитительная женщина число пчелъ?“ Другая задача: „во время свиданія между двумя влюбленными порвалась у влюбленной нитка жемчуга; $\frac{1}{6}$ жемчужинъ упала на полъ, $\frac{1}{5}$ осталась на нѣ-

*) Различныя путешествіи рассказываютъ, что индусскіе ученые производили весьма сложныя вычисленія при помощи однихъ только раковинъ, которыя замѣняли имъ жетоны. Результаты, достигнутые браминами въ предвычисленіи солнечныхъ и лунныхъ затмѣній весьма близки къ дѣйствительности. Европейцевъ поражаетъ то необыкновенное хладнокровіе и та сосредоточенность съ которыми брамини производятъ свои вычисленія. Не смотря на все несовершенство подобнаго способа, индусъ рѣдко ошибается въ своихъ вычисленияхъ.

стѣ, гдѣ они сидѣли, $\frac{1}{6}$ — спасла влюбленная, $\frac{1}{10}$ взялъ себѣ влюбленный и кромѣ того осталось еще 6 жемчужинъ; скажи сколько было всего жемчужинъ на ниткѣ". Задачи эти Баскара приписываетъ Кридгарѣ.

Глава V занимается рѣшеніемъ уравненій второй степени; рѣшеніе ихъ Баскара приписываетъ Ариабаттѣ. Въ очень простой формѣ предлагаетъ Баскара правило для рѣшеній, которое можетъ быть приложено и къ нѣкоторымъ отдѣльнымъ случаямъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Для уравненій къ которымъ нельзя примѣнить указанныя правила, Баскара пользуется различными искусственными приемами. Такъ напр. при рѣшеніи уравненія $mx^2+ax=b$ онъ сперва умножаетъ это уравненіе на $4m$ и получаетъ $4m^2x^2+4amx=4bm$; затѣмъ онъ прибавляетъ къ обѣимъ частямъ по a^2 и получаетъ $4m^2x^2+4amx+a^2=a^2+4bm$, извлекая изъ полученнаго уравненія корень, получаемъ:

$$2mx+a=\sqrt{a^2+4bm}, \text{ или } 2mx=-a+\sqrt{a^2+4bm}$$

а слѣдовательно:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+4bm}}{2m}$$

Послѣдняя формула есть общій видъ рѣшенія уравненій второй степени. Кромѣ того Баскара разсматриваетъ еще частные случаи, именно:

$$mx^2+ax=b, \quad mx^2-ax=b, \quad mx^2+ax=-b, \quad mx^2-ax=-b.$$

Когда a отрицательно, какъ во второмъ и четвертомъ случаяхъ, и $\sqrt{a^2-4bm}$ меньше отъ a , то x имѣетъ два значенія, въ противномъ случаѣ одно. Отрицательныя значенія Баскара причисляетъ къ числу невозможныхъ, такъ какъ по его словамъ „абсолютно отрицательныя числа люди не принимаютъ во вниманіе“. По мнѣнію Баскары двойственное значеніе корня квадратнаго уравненія возможно только въ случаѣ, когда оба корня положительны. Онъ поясняетъ это на примѣрѣ: „Стая обезьянъ забавлялась: одна осьмая часть ихъ въ квадратѣ бѣгала въ лѣсу, остальные двѣнадцать кричали на верхушки холмика. Скажи мнѣ сколько было всего обезьянъ?“ Отвѣтъ даетъ два рѣшенія 48 и 16. Уравненіе это Баскара рѣшаетъ слѣдующимъ образомъ:

„Полагая здѣсь стаю обезьянъ $=x$; квадратъ осмой части, увеличенный на двѣнадцать, равенъ всей стаѣ по условію вопроса, а потому обѣ части уравненія будутъ:

$$\frac{x^2}{64}+0x+12=0x^2+x+0$$

Приводя къ одному знаменателю и дѣлая приведеніе, найдемъ:

$$x^2-64x=-768$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ квадратъ 32 и извлекая квадратный корень, получимъ:

$$x-32=16$$

Въ данномъ случаѣ отрицательныя единицы первой части таковы, что единицы второй части меньше ихъ, а потому послѣднія можно принимать положительными и отрицательными и получаемъ двойное значеніе x , 48 и 16. Таково разсужденіе Баскары, на основаніи котораго онъ въ приведенномъ уравненіи допускаетъ два рѣшенія. Въ другомъ примѣрѣ Баскара разсуждаетъ иначе; примѣръ этотъ слѣдующій: „найти число обезьянъ стаи, одна пятая которой безъ трехъ въ квадратѣ спряталась въ пещерѣ, кромѣ того одна рѣзвится въ лѣсу“. Вопросъ этотъ приводитъ къ рѣшенію уравненія:

$$\left(\frac{x}{5}-3\right)^2+1=x$$

или:

$$x^2-55x=-250$$

корни его будутъ:

$$x_1=50 \quad \text{и} \quad x_2=5$$

Второе рѣшеніе Баскара отбрасываетъ, такъ какъ $\frac{1}{5}5-3$ есть число отрицательное, но одинъ изъ комментаторовъ сочиненій Баскары Кришна-Бхатта (*Krishna-Bhatta*) даетъ слѣдующее интересное толкованіе второму значенію корня, онъ говоритъ: „если-бы по условію вопроса было сказано: одна пятая часть стаи вычтенная изъ трехъ, то второе изъ рѣшеній $x_2=5$ было-бы удовлетворяющее условію вопроса, а не первое $x_1=50$, потому что пятая часть этого числа не можетъ быть вычтена изъ 3“.

Приведемъ еще одно изъ уравненій второй степени, рѣшенныхъ Баскарой: „Корень квадратный изъ половины числа пчелъ роя полетѣлъ на кустъ жасмина; $\frac{8}{9}$ цѣлаго роя осталась дома; одна самочка полетѣла за самцемъ, который жужжитъ въ цвѣткѣ лотоса, куда онъ попалъ ночью, привлеченный пріятнымъ запахомъ, и изъ котораго онъ не можетъ выйти, такъ какъ цвѣтокъ закрылся. Скажи мнѣ число пчелъ роя?“ Чтобы рѣшить это уравненіе Баскара полагаетъ число пчелъ роя равнымъ $2x^2$, тогда квадратъ половины числа пчелъ роя будетъ x , а $\frac{8}{9}$ всего роя будетъ $\frac{16}{9}x$ и онъ составляетъ уравненіе:

$$2x^2+0x+0=\frac{16}{9}x^2+x+2$$

или:

$$18x^2+0x+0=16x^2+9x+18$$

или:

$$2x^2-9x+0=0x^2+0x+18$$

откуда:

$$2x^2 - 9x = 18$$

следовательно:

$$x = 6, \text{ а } 2x^2 = 72$$

т. е. число пчелъ роя равно 72.

Мы остановились болѣе подробно на уравненіяхъ второй степени, рѣшенныхъ въ сочиненіи Баскары, во первыхъ потому, чтобы уяснить методы, примѣняемыя Баскарой при рѣшеніи этихъ уравненій, а во вторыхъ чтобы показать форму, въ которой индусскіе математики предлагали задачи для рѣшеній.

Изъ сказаннаго мы видимъ, на сколько опередили индусскіе математики, въ своихъ познаніяхъ въ Алгебрѣ, Діофанта. Двойственность рѣшеній квадратныхъ уравненій, неизвѣстна послѣднему, извѣстна индусскимъ математикамъ и сдѣланы были даже довольно удачныя попытки объяснить ее и дать ей геометрическое толкованіе, въ смыслѣ отсчитываній въ двухъ прямо противоположныхъ направленіяхъ.

Кромѣ рѣшенія уравненій второй степени въ сочиненіи Баскары встрѣчаются отдѣльные случаи рѣшенія уравненій высшихъ степеней. Изъ числа такихъ уравненій укажемъ на слѣдующее уравненіе третьей степени: $x^3 - 6x^2 + 12x = 35$. Уравненіе это является у Баскары при рѣшеніи вопроса: „найти число такихъ свойствъ, чтобы умноженное на 12 и прибавленное къ своему кубу оно равнялось суммѣ изъ шести разъ взятаго его квадрата, увеличеннаго на 35. Рѣшая этотъ вопросъ. Баскара составляетъ уравненіе:

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35$$

которое онъ приводитъ къ формѣ:

$$x^3 + 12x - 6x^2 = 35$$

вычитая изъ обѣихъ частей по 8 онъ находитъ:

$$(x-2)^3 = 27$$

или извлекая кубическій корень:

$$x-2 = 3$$

т. е.:

$$x = 5$$

О другихъ корняхъ нѣтъ и помину.

Кромѣ того Баскара рѣшаетъ еще слѣдующее уравненіе четвертой степени:

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$$

и находитъ корень $x = 11$. При рѣшеніи этого уравненія онъ также поль-

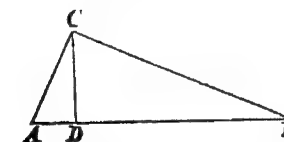
зуется искусственнымъ приѣмомъ и дѣйствуетъ такъ сказать ощупью, безъ всякихъ опредѣленныхъ правилъ *).

Напомнимъ здѣсь, что Діофантъ умѣлъ также рѣшать только уравненія второй степени и что въ „Арифметикахъ“ встрѣчается только одинъ примѣръ рѣшенія уравненія третьей степени. У индусскихъ математиковъ впервые встрѣчаются уравненія, въ которыхъ одна изъ частей состоитъ исключительно изъ однѣхъ отрицательныхъ величинъ.

Въ концѣ пятой главы помѣщены нѣкоторыя приложенія къ Геометріи. Въ числѣ ихъ находится и арифметическое доказательство Пифагоровой теоремы, если только можно назвать доказательствомъ приѣмъ, употребленный въ формѣ изложенной въ сочиненіи Баскары. Методъ индусскаго математика представляетъ поразительную противоположность съ приѣмами древнихъ греческихъ геометровъ, у которыхъ доказательства теоремъ являлись какъ строго-логическія слѣдствія ряда заключеній, слѣдующихъ изъ цѣлаго ряда предложеній, основанныхъ и вытекающихъ изъ возможно наименьшаго числа аксіомъ. Въ „Віаганитѣ“ находится два доказательства пифагоровой теоремы. Въмѣсто всякихъ формулъ и вычисленій даны только чертежи, при чемъ отдѣльныя части этихъ фигуръ обозначены числами, такъ какъ теорема дана для частнаго случая. Слово „смотри“, стоящее рядомъ съ фигурой, замѣняетъ собой всѣ толкованія и объясненія. Приведемъ оба доказательства.

Первое. Взять прямоугольный треугольникъ ABC , коего гипотенуза AB принята за основаніе и на нее опущенъ изъ вершины прямого угла перпендикуляръ CD (фиг. 7). Составныя части этого треугольника: AB ,

Фиг. 7.



BC , AC , CD , AD и DB приняты соотвѣтственно равными 25, 20, 15, 12,

*) Весьма любопытенъ приѣмъ при помощи котораго Баскара рѣшаетъ помѣненное уравненіе четвертой степени, онъ говоритъ: „выполни ясно, что если прибавить къ первой части уравненія членъ $400x+1$, то первая часть будетъ имѣть корни x^2-1 ; но вторая часть уравненія увеличенная на ту же величину будетъ $400x+10000$ и не будетъ имѣть корней: такимъ приѣмомъ нельзя получить рѣшенія уравненія, а потому необходимо прибѣгнуть къ искусственному приѣму. Примѣняя его, прибавимъ къ обѣимъ частямъ по $4x^2+400x+1$, тогда обѣ части уравненія будутъ имѣть каждая корни; прибавляя эту величину къ первой части она обращается въ x^4+2x^2+1 ; прибавляя ко второй получимъ $4x^2+400x+10000$, а потому корни будутъ x^2+1 и $2x+100$; дѣлая приведенія, обѣ части обращаются въ x^2-2x и 99; сравнивая ихъ и прибавляя по 1 къ каждой части, корни будутъ $x-1$ и 10; сравнивая снова, наконецъ получимъ $x=11$ “.

9 и 16; числа эти написаны около этих частей. Пифагорова теорема является как следствие пропорциональности некоторых из этих частей между собой. В самом деле, в таком треугольнике необходимо должны иметь место пропорции:

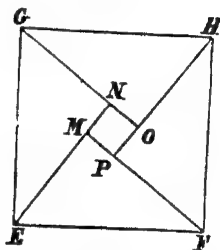
$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC} \quad \text{и} \quad \frac{CB}{AB} = \frac{DB}{CB}$$

откуда:

$$AB(AD+DB) = AB^2 = AC^2 + CB^2$$

Второе. Квадрат $EFHG$, построенный на гипотенузе EF прямоугольного треугольника EMF , разбит на четыре треугольника EMF , FPH , HOG , GNE и маленький квадратик $MNOP$ (фиг. 8). На частях

Фиг. 8.



EF , MN , EM , MF соответственно поставлены числа: 25, 5, 15, 20, из чего можно заключить, что Баскара справедливость этого предложения поясняет на частном случае. Никаких пояснений, кроме приведенных чисел, Баскара не дает; он довольствуется словом „смотри“, хотя, с вероятностью можно предположить, что ему была известна формула:

$$EF^2 = 4 \cdot \frac{EM \cdot MF}{2} + (MF - EM)^2 = MF^2 + EM^2$$

Из других предложений, справедливость которых обнаружена вышеприведенным методом на фигурах, укажем еще на соотношения:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \text{и} \quad (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

В пятой главе „Виагани“ находится еще следующее интересное предложение, которое напоминает и представляет большое сходство с одним из вопросов, решенных Диофантом в „Поризмах“. Задача Баскары состоит в следующем: „найти четыре числа, которые будучи увеличены на 2, дали бы квадраты; взяв произведения первого на второе, первого на третье и т. д. придавая каждому произведению по 18, требуется чтобы снова эти числа были квадраты; наконец требуется, чтобы сумма корней всех квадратов, увеличенная на 11, равнялась бы квадрату 13“. Полагая четыре числа равными: $x^2 - 2$, $(x+a)^2 - 2$, $(x+b)^2 - 2$ и $(x+c)^2 - 2$. От-

скавая теперь такие числа a , b и c , чтобы произведения из них по два, сложенные соответственно с 18 составляли бы квадрат, найдем, что

$$a = \sqrt{\frac{18}{2}}, \quad b = 2\sqrt{\frac{18}{2}} \quad \text{и} \quad c = 3\sqrt{\frac{18}{2}} \quad \text{или} \quad a = 3, \quad b = 6 \quad \text{и} \quad c = 9.$$

Из полученного видно, что искомые числа должны составлять арифметическую прогрессию с разностью 3.

Глава VI содержит уравнения со многими неизвестными. Она представляет собрание примечательных уравнений определенных и неопределенных первой степени. Решение их состоит в том, что значения неизвестного, определенных из одних уравнений подставляют в другие. Если число неизвестных больше на единицу числа уравнений, то в конце остается одно уравнение с двумя неизвестными, которое решается приемом, изложенным во второй главе. Если число неизвестных еще больше то некоторые из них выбираются произвольными. Из числа задач этой главы укажем на следующие: „Найти два числа таких свойств, чтобы одно деленное на 5, дало в остатке 1, другое, деленное на 6, дало в остатке 2; разность же обоих чисел, деленная на 3, должна дать 2, а сумма, деленная на 9, должна дать 5 в остатке; наконец произведение этих чисел, деленное на 7, должно дать в остатке 6“. Другой пример: „Найти число, которое будучи разделено на 2, 3 и 5 дало соответственно в остатке 1, 2, 3, частные же должны иметь тоже свойство“. Большая часть вопросов этой главы подобрана весьма удачно и решены с большим умением и искусством.

Глава VII занимается решением неопределенных уравнений второй степени. Большая часть вопросов этой главы относится к различным частным случаям, а потому глава эта не представляет ничего нового, а просто собрание отдельных правил. Первые правила этой главы показывают, как выражения формы $ax^2 + bx = y^2$ могут быть приведены к рациональной форме, или иными словами, как может быть найдено решение уравнения $ax^2 + bx = y^2$ в целых числах. По правилу следует данное уравнение умножить на $4a$, тогда получим $4a^2x^2 + 4abx = 4ay^2$ или $(2ax)^2 + 2(2abx) = 4ay^2$; затем, прибавляя к обеим частям по b^2 , найдем: $(2ax+b)^2 = 4ay^2 + b^2$. Если теперь $4ay^2 + b^2$ может быть выражено числом квадратным z^2 , то $2ax+b = z$, а следовательно $x = \frac{z-b}{2a}$. Так

как z могут удовлетворять многие значения, то между ними могут быть и такие, которые выразят x числом целым. Вышеприведенным образом может быть решено уравнение $6x^2 + 2x = y^2$, которое приводится к виду $(6x+1)^2 = 6y^2 + 1$; одно решение дает $y=2$, $z=5$, $x=\frac{2}{3}$, другое $y=20$,

$z=49$ и $x=8$ и т. д. Къ подобному уравненію сводится также вопросъ: „найти два числа m и n такіа, чтобы $(m+n)^2 + (m+n)^3 = 2(m^3+n^3)$ “, который рѣшается положеніями: $m=x+y$ и $n=x-y$, изъ которыхъ вытекаетъ уравненіе $4x^3+4x^2=12xy^2$ или $(2x+1)^2=12y^2+1$; уравненіе это удовлетворяется рѣшеніями: $y=2$, $x=3$, $m=5$ и $n=1$, или же $y=28$, $x=48$, $m=76$ и $n=28$ к т. д.

Другое правило этой главы относится къ уравненіямъ вида $ax^4 \pm bx^2 = y^2$, которыя преобразуются къ формѣ $x^2(ax^2 \pm b) = y^2$. Если теперь $ax^2 \pm b$ можетъ быть выражено числомъ квадратнымъ, то вопросъ рѣшенъ. Къ числу подобныхъ уравненій принадлежитъ уравненіе $5x^4 - 100x^2 = y^2$, а также слѣдующіе вопросы: „найти два числа, которыхъ разность квадраты, а сумма квадратовъ была-бы кубъ“. Требуемая числа $m-n=x^2$ и $m^2+n^2=y^3$. Вопросъ рѣшается положеніемъ $y=x^2$ и уравненіе обращается въ $x^4(2x^2-1) = (2m-x^2)^2$, которому удовлетворяетъ $x=5$, откуда слѣдуетъ, что $m=100$, а $n=75$.

Другія правила относятся къ рѣшенію вопросовъ, примѣромъ которыхъ можетъ служить уравненіе $3x^2+6x=y^2+2y$. Другой вопросъ „найти значенія удовлетворяющія одновременно уравненіямъ: $ax^2+by^2=z^2$ и $ax^2-by^2+1=w^2$ “. Какъ частный случай подобныхъ классовъ уравненій укажемъ на уравненія: $7x^2+8y^2=z^2$ и $7x^2-8y^2+1=w^2$, одно изъ рѣшеній которыхъ $x=1$ и $y=2$. Укажемъ еще на слѣдующія задачи: „найти условія, чтобы $3x+1$ и $5x+1$ были заразъ квадратами“; „найти условія, чтобы $2(m^2-n^2)+3$ и $3(m^2-n^2)+3$ были заразъ квадратами“.

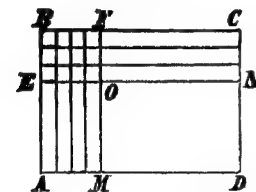
Далѣе слѣдуетъ теорія рѣшенія уравненій вида $ax+b=y^2$, при чемъ задачи являются въ формѣ $\frac{y^2-b}{a}=x$. Также рѣшены уравненія вида $ax+b=y^3$ и $cy^3=ax+b$ или же $\frac{cy^3-b}{a}=x$.

Глава VIII посвящена главнымъ образомъ рѣшенію уравненій вида $ax+by+c=xy$, а также $xyzu=a(x+y+z+u)$ и другихъ подобныхъ имъ. Рѣшеніе подобныхъ уравненій не представляетъ затрудненій и было извѣстно уже Брамагуптѣ, который примѣнялъ ихъ при астрономическихъ вопросахъ. Рѣшенія, данныя Баскарой весьма просты и изящны. Рѣшенія даны въ цѣлыхъ числахъ. Приемъ, предложенный Баскарой, какъ мы замѣтили выше, былъ снова найденъ Эйлеромъ; онъ состоитъ въ слѣдующемъ: для частнаго случая $ax+by+c=xy$, изъ чиселъ a , b и c нужно составить новое число $ab+c$ и разложить его на два множителя. Если эти множители m и n , то $m+b$ или $n+b$ будутъ значенія x , а $n+a$ и $m+a$ соотвѣствующія значенія y . Сколько будетъ существовать разложеній для $ab+c$, столько двойныхъ рѣшеній будетъ имѣть уравненіе. Справедливость указаннаго правила была извѣстна уже Брамагуптѣ и другимъ индусскимъ

математикамъ, жившимъ до Баскары. Весьма любопытно наглядное—геометрическое объясненіе, данное Баскарой для приведеннаго правила, при чемъ онъ замѣчаетъ: „математики назвали Алгеброй вычисленіе при помощи доказательствъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ она не отличалась-бы отъ Ариѳметики“. Къ сожалѣнію почти все сочиненіе Баскары противорѣчитъ его же словамъ, такъ какъ за весьма рѣдкими исключеніями можно указать на что нибудь, напоминающее доказательство.

Геометрическое толкованіе Баскары, о которомъ мы говорили, состоитъ въ слѣдующемъ: онъ прилагаетъ его къ частному случаю, именно къ уравненію $4x+3y+2=xy$. Представимъ себѣ прямоугольникъ $ABCD$ (фиг. 9), въ которомъ $AB=x$ и $AD=y$; площадь его выражается произведеніемъ xy , а также состоитъ изъ суммы трехъ частей: $4x$, $3y$ и 2 . Отдѣлимъ отъ даннаго прямоугольника часть $4x=BM$, какъ указано на фигурѣ, то останется еще часть $3y+2=DF$. Отдѣливъ отъ верхней части фигуры

Фиг. 9



часть $3y=BN$, то видимъ, что каждому изъ только что отдѣленныхъ узенькихъ прямоугольниковъ недостаетъ по 4 маленькихъ квадратика, а слѣдовательно у всего отдѣленнаго прямоугольника BN ихъ недостаетъ $3 \cdot 4=12$; такимъ образомъ мы выдѣлили еще часть $3y-12$. Въ остаткѣ получимъ прямоугольникъ $MOND$, состоящій очевидно изъ $12+2=14$. Принимая теперь $MD=1$, то $ND=14$, откуда $x=ND+NC=14+3=17$ и $y=MD+AM=1+4=5$. Или полагая: $MD=14$ и $ND=1$, то $x=1+3=4$ и $y=14+4=18$. Разлагая 14 на 2.7 и принимая $MD=2$ и $ND=7$, то найдемъ $x=7+3=10$ и $y=2+4=6$; или принимая $MD=7$ и $ND=2$, найдемъ $x=2+3=5$ и $y=7+4=11$. Точно такимъ же образомъ рассуждаетъ Баскара если a , b и c имѣютъ разные знаки.

Замѣтимъ здѣсь еще, что для подобныхъ уравненій, какъ вышеприведенное, даетъ рѣшенія уже Брамагупта. Пусть данное уравненіе б. дѣтъ $ax+by+c=dxy$. Нужно составить по правилу сумму произведеній $ab+cd$ и раздѣлить ее на произвольно выбранное число; пусть принятый дѣлитель и полученное частное будутъ m и n , тогда по правилу, если m больше n

и a больше b , то $\frac{m+b}{d}$ будет значение x , а $\frac{n+a}{d}$ значение y ; если же b больше a , то $x = \frac{n+b}{d}$ и $y = \frac{m+a}{d}$. Точно такое же соотношение будет если n больше m , только необходимо чтобы всегда большее из чисел m и n сочеталось с меньшим из чисел a и b и обратно, тогда значение x получается из суммы содержащей b , а значение y из суммы содержащей a . Лучше всего пояснить сказанное на частном примѣрѣ: $3x + 4y + 90 = 5xy$, тогда $5 \cdot 90 + 3 \cdot 4 = 462$, число это состоит из множителей 2.3.7.11; принимая 11 за дѣлитель, получим $\frac{462}{11} = 42$, слѣдовательно $m = 11$ и $n = 42$. Такъ какъ $a = 3$ и $b = 4$, то $x = \frac{m+b}{d} = \frac{11+4}{5} = 3$ и $y = \frac{42+3}{5} = 9$; если принять дѣлителемъ 22, то $x = 5$, и $y = 5$. Не

всегда можно получить указаннымъ путемъ цѣлыя значенія для x и y , но если подобныя значенія существуютъ, то ихъ всегда возможно отыскать вышеуказаннымъ методомъ. Баскара порицаетъ въ своемъ сочиненіи приведенный приѣмъ Брамагупты и считаетъ его излишнимъ; вмѣсто него онъ совѣтуетъ прямо принять одно изъ неизвѣстныхъ произвольнымъ и по нему вычислить другое. Изъ сказаннаго ясно видно, что Баскара не понималъ методъ Брамагупты и не составилъ себѣ о немъ яснаго представленія, а пытался рѣшить вопросъ приближеніями.

Глава IX—последняя, содержитъ краткое заключеніе.

Изъ этого краткаго очерка Алгебры индусовъ видно какого высокаго развитія достигли они въ этой наукѣ; въ этомъ отношеніи они стоятъ несравненно выше Діофанта—единственнаго изъ извѣстныхъ намъ греческихъ математиковъ, посвятившихъ себя Алгебрѣ. Символическій приѣмъ развитый индусскими математиками, хотя во многихъ отношеніяхъ весьма несовершененъ, но тѣмъ не менѣе превосходитъ приѣмъ Діофанта. Самыхъ блестящихъ результатовъ достигли индусскіе математики въ такъ называемомъ неопредѣленномъ анализѣ, который они довели до высокой степени совершенства. Вопросы неопредѣленнаго анализа обязаны своимъ происхожденіемъ у индусовъ ихъ астрономическимъ *) и религіознымъ воззрѣніямъ. Къ подоб-

*) Много интересныхъ данныхъ объ индусской Астрономіи находится въ сочиненіи: Bailly, Traité de l'astronomie indienne et orientale. Paris, 1787. in-4. Балли раздѣляетъ мнѣніе о глубокой древности индусскихъ наукъ. Сочиненіе это есть одно изъ первыхъ, написанныхъ по астрономіи индусовъ. Къ сожалѣнію въ своихъ выводахъ Балли слишкомъ смѣлъ; объясненія данныя имъ различнымъ цикламъ индусской хронологіи ни на чемъ положительномъ не основаны. Астрономіей и математикой индусовъ также занимался извѣстный

нымъ вопросамъ они пришли вѣроятно при опредѣленіи времени начала эпохи когда земля и нѣкоторыя изъ свѣтилъ находились въ соединеніи. Извѣстно, что вопросъ объ опредѣленіи времени подобнаго соединенія по долготѣ приводится къ рѣшенію системы совмѣстныхъ неопредѣленныхъ уравненій *). Къ рѣшенію неопредѣленныхъ уравненій также приводятъ нѣкоторые изъ вопросовъ календаря **). Задачи эти приводятъ къ нахожденію неизвѣстнаго цѣлаго числа, по даннымъ остаткамъ, полученнымъ отъ дѣленія этого числа на извѣстныя числа ***).

Мы уже выше сказали, что въ большей части случаевъ индусскіе математики сдѣлались чуждыми геометрическихъ представленій, при изслѣдованіи свойствъ чиселъ. Подобныя воззрѣнія на числа имѣлъ также Діофантъ и весьма вѣроятно, что благодаря этому, онъ достигъ такихъ результатовъ въ неопредѣленномъ анализѣ. Но Діофантъ стоитъ несравненно

Деламбръ въ своемъ сочиненіи: „Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne. T. I—II. Paris. 1817. in-4. (см. во II-мъ томѣ отдѣлъ „Astronomie orientale“, Chapitres II, III, V и VI; pag. 400—518, 538—556).

*) На подобное значеніе неопредѣленнаго анализа у индусовъ обращаетъ вниманіе Бенке въ интересномъ мемуарѣ: Woepcke, Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. Paris. 1863. in-8. (pag. 68—70).

**) При каждой изъ священныя книгъ индусовъ—Ведъ, приложенъ особенный календарь *Iyotisha*, т. е. Астрономія, въ которомъ указаны правила какъ опредѣлять время различныхъ ведическихъ церемоній, при чемъ приняты во вниманіе солнечныя и лунныя годы. Календари эти представляютъ особенный интересъ, на нихъ обратилъ еще вниманіе Кольбрукъ, описавшій календарь, приложенный къ *Rig-Veda*, самой древней изъ четырехъ Ведъ. Описание одного изъ подобныхъ календарей находится въ статьѣ „A. Weber, Ueber den Veda-Kalender, genannt Iyotischam“, помѣщенной въ Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin за 1862 г. Объ этомъ календарѣ мы уже упоминали на стр. 325. Изъ содержанія этихъ календарей можно заключить, что въ древности у индусовъ въ употребленіи былъ лунный годъ, находящійся въ связи съ солнечнымъ годомъ, продолжительность котораго не опредѣлена. Луна во время своего обращенія проходила чрезъ 28 *nakshatras*, т. е. тѣ 28 частей неба, на которыя оно было раздѣлено индусами. Каждая изъ этихъ частей опредѣлялась извѣстной звѣздой—*yogatâras*, положеніе которой было опредѣлено и извѣстно. Вопросъ о *nakshatras*-хъ занималъ многихъ ученыхъ, и въ томъ числѣ Вебера и Біо; послѣдній полагаетъ, что система эта была заимствована индусами у китайцевъ. Долгое время полагали что 28 *nakshatras* составляли лунный зодіакъ индусовъ и были ничто иное какъ особое дѣленіе эклиптики. Кольбрукъ также вначалѣ раздѣлялъ подобный ложный взглядъ на эту систему.

***) Одинъ изъ подобныхъ вопросовъ приведенъ въ сочиненіи Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig. 1874. in-8. (pag. 196—199). Задача эта имѣетъ предметомъ опредѣленіе положенія, числа обращеній и т. н. свѣтила, на основаніи нѣкоторыхъ данныхъ, часть которыхъ утеряна. Вопросъ этотъ заимствованъ Ганкелемъ изъ XII-й главы Лилавати (§ 264). При рѣшеніи этого вопроса примѣняется методъ разсѣванія.

ниже индусовъ, такъ какъ онъ ограничился рациональными числами, чего не сдѣлали индусскіе математики. Благодаря такому широкому обобщенію многія изъ предложеній X-й книги „Началъ“ Евклида, которыя представлялись древнимъ греческимъ геометрамъ въ довольно темной формѣ, являются у индусовъ какъ чисто алгебраическія выраженія. Изъ такихъ выраженій укажемъ на слѣдующія, находящіяся въ первой главѣ „Віагани“ Баскари:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}$$

или

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Выраженія эти даны у индусовъ въ числахъ.

Исходя изъ подобныхъ воззрѣній индусскимъ математикамъ было легко приложить Алгебру къ геометрическимъ изслѣдованіямъ, что они и сдѣлали на самомъ дѣлѣ, при чемъ приемы употребленные ими совершенно схожи съ употребляемыми въ настоящее время. Греческіе математики рѣшали также большую часть вопросовъ, рѣшенныхъ индусскими учеными алгебраически, но методъ ихъ былъ совершенно иной—геометрический. Многіе изъ такихъ вопросовъ находятся въ „Началахъ“ и „Данныхъ“ Евклида. За то съ другой стороны, гдѣ только дѣло касалось чисто геометрическихъ изслѣдованій, тамъ греческимъ математикамъ безспорно принадлежитъ первое мѣсто, въ подтвержденіе чего достаточно указать на то, что о коническихъ сѣченіяхъ и о ихъ свойствахъ у индусскихъ математиковъ не существуетъ никакого понятія.

Различіе установленное греческими математиками, между числами и количествами, неимѣющее значенія съ научной точки зрѣнія, никогда не было извѣстно индусамъ. Хотя они не обошли трудностей, сопровождающихъ понятія о прерывномъ и непрерывномъ, но они сумѣли перейти отъ разсматриванія первыхъ къ разсматриванію послѣднихъ. Благодаря этому они сдѣлали въ математикѣ значительный шагъ впередъ, результаты котораго очевидны. Если понимать подъ Алгеброй примѣненіе арифметическихъ дѣйствій къ составнымъ величинамъ различнаго рода, будутъ-ли онѣ рациональныя или иррациональныя числа, или же просто величины, то въ такомъ случаѣ можно считать индусскихъ ученыхъ творцами Алгебры *).

*) Въ Средніе Вѣка было распространено мнѣніе, что Алгебру европейскіе математики заимствовали у индусовъ. Такой взглядъ высказанъ также въ математической поэзіи „De Vetula“, написанной, какъ полагаютъ, въ началѣ XIII в. Объ этомъ сочиненіи мы упоминали въ примѣчаніи на стр. 175—176.

Въ заключеніе этой главы скажемъ еще нѣсколько словъ объ Арифметикѣ и Тригонометріи индусовъ. Коснемся сначала Тригонометріи *).

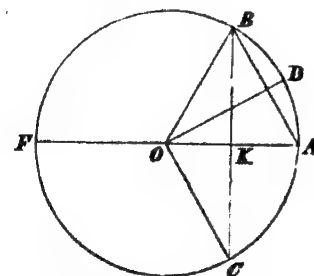
Индусскіе математики, подобно греческимъ, пользовались кругомъ для измѣренія угловъ. Окружность они дѣлили на 360° , а каждый градусъ на 60 минутъ. Подобное дѣленіе было ими заимствовано вѣроятно у халдеевъ, или же у грековъ. При такомъ дѣленіи окружность заключала 21600 минутъ. Извѣстно, что греческіе математики дѣлили также радиусъ на 60 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая снова дѣлилась на 60 частей. Длину окружности они стремились выразить въ частяхъ радиуса, т. е. они выпрямляли окружность. Индусскіе же математики рѣшали тотъ же вопросъ въ обратномъ смыслѣ, т. е. они занимались скривленіемъ прямой линіи и опредѣляли число минутъ заключающихся въ скривленномъ радиусѣ **); иными словами они пытались выразить длину радиуса въ единицахъ длины окружности. Длину радиуса индусскіе математики полагали равной 3438 минутамъ. Выраженіе это было вѣроятно найдено вставляя въ формулу $2\pi r = 21600$ минутамъ вмѣсто π его значеніе $\pi = 3,1416$, которое, какъ мы замѣтили выше, было извѣстно еще Ариабаттѣ. Дѣлая подстановку, находимъ:

$$r = \frac{21600}{6.2832} = 3437.7$$

которое весьма мало разнится отъ $r = 3438$. Кромѣ того кругъ дѣлился двумя взаимно-перпендикулярными діаметрами на четыре квадранта, по 90° въ каждомъ. Независимо отъ этого квадрантъ былъ раздѣленъ на 24 части, по $3^\circ 45' = 225'$ въ каждомъ. Индусскіе математики при вычисленіи угловъ пользовались не цѣлыми хордами, подобно греческимъ геометрамъ, а только полухордами.

Изъ тригонометрическихъ функцій были извѣстны индусскимъ математикамъ синусъ, синусъ версусъ и косинусъ. Хорду стягивающую дугу па-

Фиг. 10.



зывали *jya* или *jiva*, т. е. тетива лука. Половина хорды носила названіе

*) Тригонометріей индусовъ занимался также Венке въ своей статьѣ: „Woepcke, Sur le mot kardagi et sur une méthode indienne pour calculer les sinus“, которая помѣщена въ „Nouvelles Annales de Mathématiques“. T. XIII, 1854.

**) Канторъ выражаетъ это терминомъ: *Arcufication der graden Linie*.

jyārdha или *ardhajyā*. Принимая BC за хорду, а BK за полухорду (фиг. 10) мы видим, что линия BK есть ничто иное как \sin . Из других тригонометрических функций были известны еще $\sin. vers.$, т. е. линия KA , которую они называли *utkramajyā* и \cos (*koṭijyā*)— OK .

Из соотношений, существующих между тригонометрическими величинами, были известны следующие: называя чрез x угол BOA и применяя пифагорову теорему къ прямоугольному треугольнику BOK легко было найти выражение:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = r^2 = (3438)^2$$

Такъ какъ хорда дуги въ 60° равна радиусу круга или 3438 минутамъ, то ея половина очевидно была равна 1719 минутамъ, т. е. $\sin 30^\circ = \frac{r}{2} = 1719'$. Зная это легко можно было найти выражение для синуса половины угла, именно, применяя пифагорову теорему къ прямоугольному треугольнику KBA находимъ:

$$\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2 = (\sin x)^2 + (\sin. vers. x)^2$$

но, замѣчая, что:

$$\sin. vers. x = r - \cos x$$

и

$$\sin x^2 + \cos x^2 = r^2$$

найдемъ:

$$\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^2 = 2r^2 - 2r \cdot \cos x$$

откуда:

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{r}{2}(r - \cos x)} = \sqrt{1719(3438 - \cos x)}$$

Весьма вѣроятно, что на основаніи вышеприведенныхъ соображеній, была составлена таблица синусовъ, находящаяся въ „Суріѣ Сидгантѣ“, о которой мы имѣли уже случай говорить (см. стр. 18). Изъ приведенной формулы легко можно найти:

$$\sin 15^\circ = 890'$$

$$\sin 7^\circ 30' = 449'$$

$$\sin 3^\circ 45' = 225'$$

замѣтивъ, что при послѣдовательномъ раздѣленіи дуги пополамъ синусы все болѣе и болѣе приближаются къ дугѣ, и наконецъ при $3^\circ 45'$ синусъ совпадаетъ съ самой дугой и равенъ самъ 225'. Такимъ образомъ мы видимъ, что ограничиваясь приближеніемъ точно до 1' мы можемъ принимать, что при углѣ $x < 225'$ существуетъ всегда равенство $\sin x = x$. Изъ вышесказаннаго

ясно, почему дуга въ $3^\circ 45'$ легла въ основаніи таблицы синусовъ „Суріѣ Сидгантѣ“. Дуга эта составляетъ 96-ю часть окружности и носила особое названіе *kramajyā*, т. е. *прямой синусъ**); этимъ же терминомъ называли и самый синусъ дуги въ $225'$. Дуга въ $3^\circ 45'$ была принята за *единицу мѣры* окружности, какъ это видно изъ приведенной выше таблицы „Суріѣ-Сидгантѣ“, которая составлена для угловъ отъ $3^\circ 45'$ до 90° и заключаетъ 24 послѣдовательныхъ значенія угловъ возрастающихъ отъ $3^\circ 45'$ до $3^\circ 45'$ **).

Справедливо-ли такое воззрѣніе на происхожденіе таблицъ синусовъ индусовъ нельзя сказать утвердительно, за недостаткомъ указаній по этому предмету. Весьма можетъ быть, что имѣло мѣсто и противное, т. е. что первоначально было принято, что $\sin \frac{360^\circ}{96} = \frac{360^\circ}{96}$, а затѣмъ уже были отысканы и другіе синусы. При этомъ считаемъ нелишнимъ замѣтить, что исходя изъ подобныхъ же соображеній, Архимедомъ было найдено соотношеніе между окружностью и діаметромъ, въ видѣ $\pi = \frac{22}{7}$, принявъ, что площадь 96-ти-угольника совпадаетъ съ площадью описаннаго около него круга.

По мнѣнію Ариета, много занимавшагося вопросомъ о математикѣ

*) Термины *cardadja*, *cardagia*, *cardaga* встрѣчаются весьма часто въ различныхъ сочиненіяхъ, написанныхъ по латини въ Средніе Вѣка; термины эти употребляются въ смыслѣ *синуса* и суть ничто иное какъ видовыясненное санскритское *kramajyā*.

**) Таблица синусовъ и ихъ первыхъ разностей, находящаяся въ „Суріѣ-Сидгантѣ“, заимствованная потомъ Ариабаттой изъ этого сочиненія и включенная имъ въ X-е правило первой главы „Ариабаттіама“ имѣетъ слѣдующій составъ:

Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности	Дуги	Синусы	Разности
0	0		8	1719'		16	2978'	
1	225'	225'	9	1910'	191'	17	3084'	106'
2	449'	224'	10	2093'	183'	18	3177'	93'
3	671'	222'	11	2267'	174'	19	3256'	79'
4	890'	219'	12	2431'	164'	20	3321'	65'
5	1105'	215'	13	2585'	154'	21	3372'	51'
6	1315'	210'	14	2728'	143'	22	3409'	37'
7	1520'	205'	15	2859'	131'	23	3431'	22'
8	1719'	199'	16	2978'	119'	24	3438'	7'

индусовъ, таблицы синусовъ возникли слѣдующимъ образомъ. Зная соотношенія между частями треугольника, выражаемыя формулами:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad 1 - \cos x = \sin \text{vers } x$$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \quad \sin \text{vers } 2x = 2\sin^2 x$$

первоначально были найдены $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а затѣмъ синусы 15° , $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$, $22^\circ 30'$, $11^\circ 15'$. Найдя эти величины вычислялись синусы дополнительныхъ угловъ 60° , 75° , $82^\circ 30'$, $86^\circ 15'$, $67^\circ 30'$, $78^\circ 45'$. Имѣя эти величины послѣдовательнымъ дѣленіемъ пополамъ находили синусы $37^\circ 30'$, $41^\circ 15'$, $33^\circ 45'$, коихъ дополненіями будутъ $52^\circ 30'$, $48^\circ 45'$, $56^\circ 15'$. Для синуса $52^\circ 30'$ пополамъ находили синусъ $26^\circ 15'$, а затѣмъ синусъ $63^\circ 45'$; для пополамъ синуса $37^\circ 30'$ находили синусъ $18^\circ 45'$ и синусъ дополнительнаго угла $71^\circ 15'$. Такимъ образомъ возникла таблица синусовъ, въ которой углы возрастаютъ отъ $3^\circ 45'$ до $3^\circ 45'$. Предѣльными значеніями синусовъ въ этой таблицѣ были $\sin 3^\circ 45' = 225'$ и $\sin 90^\circ = 3438'$.

Въ указанной нами таблицѣ „Сурин-Сидганты“ синусы выражены въ видѣ трехзначныхъ или четырехзначныхъ цѣлыхъ чиселъ. Имѣя подобную таблицу индусскими математиками, по мнѣнію Ганкеля, была найдена эмпирически формула:

$$\sin c - \sin b = (\sin b - \sin a) - \frac{\sin b}{225}$$

въ которой a , b и c представляютъ три послѣдовательно возрастающихъ величины, разность d между которыми равна 225'. Выраженіе это въ приложеніи къ настоящему случаю будетъ:

$$\sin [(n+1) \cdot 225'] - \sin (n \cdot 225') = \sin (n \cdot 225') - \sin [(n-1) \cdot 225'] - \frac{\sin (n \cdot 225')}{225}$$

Зная подобную интерполяционную формулу индусы могли всегда составить выше приведенную таблицу синусовъ, въ случаѣ если-бы она затерялась. Въ дѣйствительности такая интерполяционная формула существуетъ, съ тою только разницею, что при $\sin b$ множитель $\frac{1}{225}$ замѣненъ множителемъ $2 \sin \text{vers } d = \frac{1}{233.5}$, который впрочемъ оказываетъ весьма незначительное вліяніе на составъ таблицы, въ указанныхъ выше предѣлахъ.

Были также попытки составить болѣе точныя таблицы. Баскара выражаетъ синусы и косинусы въ частяхъ радіуса круга, именно онъ находитъ:

$$\sin 3^\circ 45' = \frac{100}{1529}, \quad \cos 3^\circ 45' = \frac{466}{467}$$

$$\sin 1^\circ = \frac{10}{573}, \quad \cos 1^\circ = \frac{6568}{6569}$$

Числа полученные въ верхней строкѣ разнятся немного болѣе одной десятиллионной части радіуса отъ истинныхъ значеній. Числа второй строки разнятся на нѣсколько десятиллионныхъ отъ настоящихъ величинъ. Результаты, полученные Баскарой, въ значительной степени превосходятъ значенія, вычисленные Птоломеемъ въ „Альмагестѣ“. На это слѣдуетъ обратить особенное вниманіе*). Таблица синусовъ составленная Баскарой дана для угловъ возрастающихъ отъ 1° до 1° . Таблицу эту Баскара строитъ при помощи формулы:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

По предположеніямъ Кантора выраженіе, представляющее зависимость между хордою, окружностью, дугою и діаметромъ, о которомъ мы упоминали выше (см. стр. 43) находится въ зависимости отъ таблицы синусовъ, данной Баскарой.

При астрономическихъ вычисленіяхъ индусы пользовались также иногда сферическими треугольниками, но только прямоугольными. Изъ формулъ Сферической Тригонометріи имъ было извѣстно соотношеніе:

$$\sin h \sin d = \sin a$$

Въ большей части случаевъ сферическіе треугольники индусы старались замѣнить плоскими, которые они всегда разбивали на прямоугольные. Другихъ выраженій, представляющихъ зависимость между частями сферическаго треугольника, на сколько извѣстно въ настоящее время, индусы не знали.

*) Отъ индусовъ таблицы синусовъ перешли къ арабамъ, которые многія изъ своихъ познаній въ математическихъ наукахъ заимствовали изъ индусскихъ сочиненій. Одинъ изъ арабскихъ писателей Ибнъ-Аладами (Ibn-Aladami, около 900 г.) въ своемъ сочиненіи „Ожерелье изъ жемчуга“ говоритъ, что къ халифу Альмансору (около 773 г.) пришелъ изъ Индостана ученый, весьма свѣдущій въ вычисленіяхъ, извѣстныхъ подъ именемъ *Сиддханти*, относящихся къ движенію свѣтила. Яко это было знакомо съ методами вычисленія уравненій, основанными на *cardadja*, т. е. синусахъ, вычисленныхъ отъ полу-градуса до полу-градуса. Также были ему извѣстны приемы для вычисленія солнечныхъ и лунныхъ затмѣній и многое другое. Все вышеупомянутое было изложено въ сочиненіи, которое по словамъ индусскаго ученаго, онъ заимствовалъ изъ сочиненія о синусахъ, носящаго названіе одного изъ царей. Есть основаніе предполагать, что сочиненіе о которомъ упоминаетъ арабскій ученый есть ничто иное какъ сочиненіе Брамагупты „Брама-Спутта-Сидганты“. Кольбрукъ первый высказалъ предположеніе, что астрономическая система, извѣстная у арабовъ подъ именемъ „Сиддханти“, есть система, изложенная въ сочиненіи Брамагупты. Такое мнѣніе вполне вѣрно, такъ какъ Альбируни въ XIV-й главѣ своего сочиненія объ Индостанѣ даетъ подробное содержаніе всѣхъ главъ „Брама-Спутта-Сидганты“.

Отдельных сочинений и глав тригонометрического содержания в индусских сочинениях нет, все известное до настоящего времени по этому вопросу заимствовано из известных нам сочинений астрономического и математического содержания.

Перейдем теперь к Арифметике индусов*). У индусских математиков существовало несколько способов изображать числа**. Из всех си-

*) Изобретение, так называемых, арабских цифр многие писатели приписывают индусам. Мы уже выше (см. стр. 199) привели мнение Фибоначчи по этому вопросу. Одно из самых ранних указаний на цифры находится в одной еврейской рукописи, написанной около 950 г. в северной Африке. Рукопись эта есть комментарий Абу-Сала-бен-Тамима (Abou-Sahl-ben-Tamim) на известное сочинение кабалистического содержания, написанное Serpher Jesira. Рукопись эта хранится в настоящее время в одной из парижских библиотек. В этой рукописи говорится, что „индусы нашли девять знаков для изображения единиц“.

Более подробные указания находятся в сочинении византийского монаха Максима Плануда, о котором мы уже говорили (см. стр. 165). В своем сочинении „Счетъ маркамъ по методу индусовъ (φύζορρίκ ηχι Ἰνδούζ)“ Планудъ говоритъ: „Такъ какъ число заключаетъ безконечное, познание же безконечнаго невозможно, то первоклассные мыслители между астрономами нашли методъ, при помощи котораго можно числа при вычисленияхъ представить болѣе наглядно и точно. Такихъ знаковъ существуетъ только девять и они слѣдующіе: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Къ нимъ прибавляютъ еще одинъ знакъ, который называютъ *tziphra* и который у индусовъ представляетъ отсутствіе чего либо. Поименованные девять знаковъ получили начало у индусовъ. Знакъ *tziphra* изображаютъ слѣдующимъ образомъ ○“. Знаки цифръ, приведенные в сочинении Плануда весьма мало напоминаютъ наши цифры; сходство представляютъ только знаки 1, 9 и 0.

Изъ приведенныхъ словъ Максима Плануда можно заключить, что онъ первый познакомил византийцевъ съ такъ называемыми арабскими цифрами. Въ Западной Европѣ онѣ были известны почти 200 лѣтъ ранѣе и были окончательно введены такъ называемыми алгоритмистами (см. стр. 198) в Испанію, Францію, Англію и Германію, которые уже въ началѣ XIII в. вытѣснили сторонниковъ абакуса—абасистовъ.

Сочинение Максима Плануда было издано въ греческомъ текстѣ подъ заглавіемъ „*Planudes*, Rechenbuch, Griech. n. d. HS. hrsg. v. C. J. Gerhardt. Halle. 1865. in-4“. Нѣмцкій переводъ былъ изданъ недавно подъ заглавіемъ: „*Planudes*, Rechenbuch. Uebers. v. H. Wäschke. Halle. 1878. in-8“.

**) Отличительная особенность различныхъ индусскихъ сочинений, не только космогоническаго, но также философскаго и религіознаго содержания, та, что гдѣ только возможно авторы ихъ вводятъ громадные числа, которыя на европейскаго читателя производятъ подавляющее впечатлѣніе по своей необитности. Существуютъ цѣлыя системы численій, гдѣ числа дѣлятся на классы, которыми выражаются единицы высшаго наименованія. Изъ такихъ системъ укажемъ на систему, находящуюся въ Магабгаратѣ, гдѣ она примѣняется при перечисленіи богатствъ Joudhichtbira. Также интересна система, примѣненная въ Рамалиѣ, при перечисленіи числа обезьянъ, составляющихъ армію Сугрива. Изъ подобныхъ системъ, находящихся въ сочиненіяхъ религіознаго содержания особенное вниманіе обращаютъ на

сестъ, особеннаго вниманія заслуживаетъ символическая система, въ которой числа обязаны своимъ наименованіемъ названію того предмета, котораго количество онѣ выражаютъ. Всего лучше пояснить это на примѣрахъ. Такъ напр. число 1 обозначали названіями предметовъ встречающихся только въ единственномъ числѣ, какъ напр.: *солнце, луна, начало, Брами, форма*. Число 2 выражали названіями: *глаза, руки, уши, ноги*. Число 4—словами *Веды* (такъ какъ существуетъ четыре священныя книги Веды), *оксаны, страны свѣта* и т. д. Число 32—названіемъ *зубы* и т. д. Такъ какъ при такомъ способѣ выражать числа существовало множество синонимовъ, то для выраженія различныхъ чиселъ существовало множество комбинацій. При такомъ способѣ выражать числа, можно бы сравнительно легко обле-

себя числа, встречающіяся въ одной изъ священныхъ книгъ буддистовъ „*Lalitavistara*“, въ которой приведена біографія одного святаго. Въ этомъ сочиненіи говорится о сотняхъ тысячъ миллионѣвъ святыхъ; украшенія трона Буды составляютъ сотни тысячъ предметовъ; сотни тысячъ божествъ и сто тысячъ миллионѣвъ Богдхатасовъ восхваляютъ тронъ Буды, который есть произведение заслугъ, скопившихся въ теченіи ста тысячъ миллионѣвъ *kalpas* (*kalpa* = 4 320 000 000 лѣтъ); большой лотосъ, который разцвѣтаетъ въ ночь зачатія Буды, покрываетъ собою пространство въ 68 миллионѣвъ *yôdjanas*). Въ этомъ же сочиненіи говорится о числахъ, выраженныхъ единицей сопровождаемой 421 нулемъ. Основной единицей высшаго наименованія этой системы есть *tallakchana*, т. е. единица, сопровождаемая 53 нулями.

Въ „*Lalitavistara*“ изложена слѣдующая система мѣръ протяженій, которая положительно напоминаетъ пріемъ, употребленный Архимедомъ, въ сочиненіи „*О числѣ песчинокъ*“, для выраженія большихъ чиселъ. Эта интересная система состоитъ въ слѣдующемъ:

1 весьма малая пылинка	= 7 пылинкамъ первоначальныхъ атомовъ.
1 малая пылинка	= 7 весьма малымъ пылинкамъ.
1 пылинка поднятая вѣтромъ	= 7 пылинкамъ.
1 пылинка зайца (поднятая)	= 7 пылинкамъ, поднятымъ вѣтромъ.
1 пылинка барана	= 7 пылинкамъ зайца.
1 пылинка быка	= 7 пылинкамъ барана.
1 зерно мака	= 7 пылинкамъ быка.
1 зерно горчицы	= 7 зернамъ мака.
1 зерно ячменя	= 7 зернамъ горчицы.
1 суставъ пальца	= 7 зернамъ ячменя.
1 пядень	= 12 суставамъ.
1 локоть	= 4 пядямъ.
1 дуга	= 4 локтямъ.
1 <i>krôsa</i> страны Могадга	= 1000 дугамъ.
1 <i>yôdjana</i>	= 4 <i>krôsas</i> .

По мнѣнію Велке, Архимедъ заимствовалъ свою систему изъ вышеупомянутаго сочиненія. Справедливо-ли такое мнѣніе это вопросъ спорный, но во всякомъ случаѣ нельзя не обратить вниманія на то обстоятельство что „*Lalitavistara*“ была написана въ III в. до Р. X., т. е. именно въ то время когда жилъ Архимедъ (287—212 до Р. X.)

вать числа и действия надъ ними въ форму смысловатыхъ стиховъ со всевозможными остроумными изрѣченіями. Еще въ настоящее время составленіе подобныхъ изрѣченій, по словамъ Гумбольда, весьма распространено на островѣ Явъ. Какое множество синонимовъ существовало для выраженія одного и того же числа, можно видѣть изъ словъ Брокгауза, который говоритъ, что для выраженія чиселъ 1 и 2, существовало болѣе 300 именъ, для каждаго *).

Подобная система выраженія чиселъ находится въ древнѣйшемъ астрономическомъ сочиненіи индусовъ „Суріѣ-Сидгантѣ“, изъ чего можно заключить, что она весьма древняя. Система эта имѣла важное значеніе для индусскихъ ученыхъ, которые все свои сочиненія излагали въ стихотворной формѣ. Въ такой формѣ написаны сочиненія Ариабатты, Брамагупты и др. математиковъ. Баскара-же ограничивается тѣмъ, что въ стихотворной формѣ излагаетъ только вопросы и правила; поясненія онъ дѣлаетъ въ прозѣ, причѣмъ все такъ облачаетъ свои мысли въ поэтическія представленія. Излагая содержаніе сочиненій Брамагупты и Баскары мы привели нѣкоторые изъ примѣровъ, рѣшенныхъ въ этихъ сочиненіяхъ и обратили вниманіе на поэтическую ихъ форму. Подобный способъ изложенія и представленія былъ вполне въ духѣ индусовъ, у которыхъ поэзія достигла высокой степени своего развитія **). Предлагать задачи въ стихотворной формѣ отъ индусовъ вѣроятно перешло на Западъ. Съ вѣроятностью можно предположить, что греческія эпиграммы, встрѣчающіяся въ „Арифметикахъ“ Діофанта, были заимствованы греками у индусовъ. Впослѣдствіи времени, форма эта стала весьма распространенною на всемъ Западѣ, въ особенности она встрѣчается въ старыхъ германскихъ задачникахъ XVI, XVII и XVIII столѣтій; но только нѣмцы поэтическихъ лотосовъ индусовъ вездѣ замѣнили трактирны-

*) См. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Philolog. Historich. Klasse IV. 1852.

**) Много интересныхъ данныхъ, относящихся къ индусской наукѣ вообще можно найти въ интересномъ мемуарѣ Рено: Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde, antérieurement au milieu du XI-e siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois; par M. Reinaud. Сочиненіе это помещено: въ Mémoires de l'Institut National de France. Académie des Inscriptions et Belles-lettres, T. XVIII, Paris, 1849. in-4.

Въ послѣднее время стали много заниматься санскритской литературой, появились даже цѣлыя многотомные сборники, какъ напр. „Indische Studien“, издаваемые Weber'омъ. Въ особенности много обязана своимъ развитіемъ санскритская литература Азіатскому Обществу въ Калькуттѣ, основанному въ 1784 г. Однимъ изъ первыхъ членовъ этого общества былъ извѣстный Джонсъ (Sir William Jones), посвятившій себя изученію санскритской литературы. Занимаясь въ школѣ браминовъ въ Бенаресѣ, онъ познакомился съ извѣстной поэмой Калидасы „Сакунтала“, которую онъ перевелъ сначала на латинскій языкъ, а потомъ и на англійскій.

ми счетами, за выпитое вино и пиво. Изъ Германіи стихотворная форма при изложеніи математическихъ сочиненій перешла также въ Россію. Извѣстно нѣсколько математическихъ сочиненій, составленныхъ въ прошломъ столѣтіи, которыя написаны стихами, въ томъ числѣ упомянемъ извѣстную „Арифметику“ Магницкаго, въ которой все правила изложены стихами.

Изъ другихъ системъ изображенія чиселъ укажемъ еще систему, принимаемую Ариабаттой, который все числа отъ 1 до 25 выражаетъ первыми 25-ю согласными санскритскаго алфавита; остальные 8 согласныхъ служатъ для выраженія 30, 40, ..., 90, 100. Для выраженія чиселъ большихъ 100 служили гласныя, которыя приставлялись къ соответствующей согласной, смотря по ея значенію. Гласныя эти выражали первые девять степеней числа 10. Изслѣдованія Роде относительно системы, принятой Ариабаттой, показали, что Ариабаттѣ была извѣстна *арифметика положеній*, т. е. что наименованіе числа зависѣло отъ мѣста, которое оно занимаетъ въ ряду другихъ чиселъ. Самъ Ариабатта часто говоритъ о *мѣстѣ* (*sthāna*) числа. Также извѣстенъ былъ ему *нуль* (*kha*) *). Подобная система обозначенія чиселъ, какъ у Ариабатты, встрѣчается еще въ настоящее время въ Деканѣ.

Также занимались много индусскіе математики магическими квадратами, къ сожалѣнію нѣтъ положительныхъ указаній на изслѣдованія ихъ въ этой области **). Какъ на одно изъ приложеній магическихъ квадратовъ нѣкоторые писатели указываютъ на игру въ шахматы ***).

*) Также существовало другое названіе для нуля, именно *пустота*—*śūnya*. Въ „Суріѣ-Сидгантѣ“ нуль выражаютъ терминами: *атмосфера*, *воздухъ*, *пространство*—*cyuti*, *cyut* и *ambaga*.

**) Относительно происхожденія магическихъ квадратовъ нѣтъ положительныхъ указаній, хотя нѣкоторые ученые говорятъ, что свое начало они получили въ Индостанѣ. Справедливо-ли это нельзя сказать утвердительно, но во всякомъ случаѣ извѣстно, что индусы много и съ успѣхомъ занимались магическими квадратами, на что обратилъ вниманіе еще извѣстный путешественникъ Лалуберъ въ своемъ сочиненіи: *La Louberè, Du Royaume de Siam*. T. II. Amsterdam. 1691. Вопросъ о магическихъ квадратахъ исторически разобранъ въ сочиненіи: *S. Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften*. Leipzig. 1876. in-8, въ статьѣ „Historische Studien über die magischen Quadrate“.

Въ концѣ XVII в. Лагиромъ была отыскана въ одной изъ парижскихъ библиотекъ греческая рукопись, въ которой трактуются объ магическихъ квадратахъ. Авторъ этой рукописи византійскій грекъ *Москопулюсъ* (Moschopolus). Время когда онъ жилъ неизвѣстно, полагаютъ что въ XV в. Содержаніемъ этой рукописи занимался также Гюнтеръ, издавшій ее текстъ въ своей статьѣ.

***). Относительно игры въ шахматы извѣстно, что она была изобрѣтена еще въ глубокой древности, такъ какъ о ней говорится въ Рамаянѣ. Индусы игру эту называли *tchatur-*

Не входя въ дальнѣйшее разсмотрѣніе ариѳметическихъ методовъ индусовъ упомянемъ только, что имъ были извѣстны четыре основныя дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, а также извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней, которые они производили съ большимъ искусствомъ и умѣніемъ. Методы ихъ мало чѣмъ разнятся отъ употребляемыхъ нынѣ. Мы на это уже указали говоря о сочиненіяхъ Баскари. Также основательно были знакомы индусскіе математики съ цѣлымъ рядомъ вопросовъ практической ариѳметики, каковы: правило смѣшенія, правило пробы, правила торговли, правила процентовъ и правила трехъ, пяти и т. д. членовъ, или тройныя правила.

Изъ всего выше сказаннаго можно заключить, что индусы достигли высокаго развитія въ методахъ вычисленія по приближенію, хотя впрочемъ иногда методы ихъ сходны съ методами нѣкоторыхъ греческихъ математиковъ, какъ напримѣръ Герона Старшаго. Геометрія индусовъ заслуживаетъ также вниманія, ихъ методы такъ своеобразны и отличны отъ методовъ греческихъ, что приписывать вліяніе греческой Геометріи на развитіе этой науки у индусовъ было бы совершенно несправедливымъ. Трудно предполагать, чтобы сочиненія Діофанта проникли въ Индію, тѣмъ болѣе, что такое распространенное сочиненіе какъ „Начала“ Евклида, стало извѣстно индусамъ только въ началѣ XVIII столѣтія.

Безъ сомнѣнія греческіе математики могли имѣть вліяніе на развитіе этой науки у индусовъ, что утверждаетъ Веберъ въ своихъ „Академическихъ лекціяхъ по исторіи Индіи“, читанныхъ имъ въ Берлинѣ въ 1852 году. На сколько велико было вліяніе греческой науки на развитіе математи-

anga, т. е. четыре арміи. Названіе это вѣроятно дано было потому что индусскія арміи состояли изъ четырехъ главныхъ родовъ войскъ, именно: колесницъ, слоновъ, пѣхоты и кавалеріи. Впослѣдствіи съ игрой этой познакомились арабы, у которыхъ она называлась schatrandj. Отъ арабовъ она перешла къ европейцамъ.

Относительно изобрѣтенія игры въ шахматы у индусовъ существуетъ слѣдующее преданіе: за 400 л. до Р. X. жилъ царь Schechgam, для котораго браминъ Sissa изобрѣлъ игру въ шахматы. Игра эта очень понравилась царю, который спросилъ изобрѣтателя, что онъ желаетъ получить въ награду за свою выдумку. Браминъ отвѣтилъ: я хочу столько зеренъ пшеницы, сколько получится если положить на первую клетку шахматной доски два зерна, постоянно будемъ удваивать это число, иными словами онъ пожелалъ получить $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64}$ зеренъ. Царь сначала согласился, но вскорѣ увидѣлъ, что требованіе брамина непозволнимо. Число зеренъ полученное такимъ образомъ равняется 180000000000000000 или же это составляетъ 15 милліоновъ кубич. футовъ пшеницы.

У Римлянъ также существовала игра, напоминающая шахматы это—ludus latronum. Игру эту они заимствовали въ Азію во время своихъ походовъ. Съ игрой этой были знакомы Китайцы. Извѣстно, что въ эту игру играли Киръ, Тамерланъ и др.

ческихъ наукъ индусовъ и время когда началось это вліяніе, достоверно неизвѣстно; нужно полагать не ранѣе похода въ Индію Александра Великаго. Во время процвѣтанія Индійско-Греческаго государства, продолжавшагося до I в. до Р. X., это вліяніе не могло быть сильно, такъ какъ состояніе Астрономіи у грековъ было самое ничтожное. Гораздо большее вліяніе стали имѣть греки на индусовъ во время господства римлянъ; въ это время торговныя сношенія между Индіей и Римской имперіей были очень развиты. Ежегодно греческіе и римскіе купцы посѣщали не только прибрежныя, но и внутренніе города Индостана. Индійскіе купцы имѣли постоянное мѣсто-пробываніе въ Александріи. Въ интересахъ торговли индусскіе раджи посылали посольства римскимъ императорамъ, изъ этихъ посольствъ намъ болѣе извѣстны посольства къ Августу, Клавдію, Трояну, Антонину Пію и Юліану. Къ этому времени необходимо отнести и вліяніе греческой науки на науку браминовъ, и дѣйствительно самый древній изъ индусскихъ астрономовъ относится къ V столѣтію по Р. X. Нѣкоторыя философскія и теологическія ученія гностиковъ, манихеевъ и неоплатониковъ носятъ чисто индусскій характеръ.

Нѣкоторые ученые, въ томъ числѣ Шлегель (*Schlegel*) и Жакколиотъ (*Jaccoliot*), указываютъ на памятники, скрытые въ пагодахъ, которымъ по 13000 и 17000 лѣтъ, но это все догадки и предположенія. Дѣлать какія либо заключенія относительно древности какихъ-бы то нибыло памятниковъ весьма трудно, въ особенности въ Индіи, а самые свѣдущіе изъ членовъ Азіатскаго Общества въ Калькуттѣ заявили, что они могутъ только приблизительно указать время происхожденія нѣкоторыхъ сочиненій и что они могутъ ошибаться на 1000 лѣтъ. Памятники же, заслуживающіе довѣрія, относятся не ранѣе какъ къ V столѣтію по Р. X.

Пользоваться письменными памятниками индусовъ необходимо съ величайшею осторожностью, въ противномъ случаѣ легко сдѣлаться жертвою хитрыхъ пандитовъ (индусскіе ученые), какъ это случилось съ знаменитымъ Кольбрукомъ и другими учеными, сдѣлавшимися жертвами своего довѣрія. Пандиты, почерпнутыя ими свѣдѣнія у Кольбрука, перекладывали на санскритскій языкъ самыми своеобразными стихами и потомъ выдавали это тому же Кольбруку за сочиненія своихъ древнихъ писателей. Уже извѣстный арабскій математикъ XI столѣтія Альбируни сообщаетъ, что брамины надували его самымъ безсовѣстнымъ образомъ: познанія прибрѣтенныя отъ него они перекладывали на стихи (*slokas*) и потомъ выдавали за свои собственныя идеи. Къ этому же времени относятся и основаніе ученой Академіи, на подобіе Академіи основанной Аль-Мамуномъ, однимъ изъ индусскихъ князей, но члены этой Академіи занимались только надувательствомъ, и она скоро должна была прекратить свою дѣятельность.

Намъ, изучавшимъ Геометрію по методу изложенія грековъ, приученнымъ къ строго-логической послѣдовательности, привыкшимъ относиться съ глубокимъ уваженіемъ къ классической литературѣ древнихъ грековъ, кажется что эта форма изложенія есть единственно возможная и научная, и мы не замѣчаемъ какъ не только вся наша нынѣшняя Ариметика и Алгебра, но и вся наша нынѣшняя математика по формѣ и по своему духу разнятся отъ формы и духа Геометріи древнихъ грековъ. Читатель, прочитавши со вниманіемъ изложенное о наукѣ индусовъ, увидитъ какъ близокъ духъ нынѣшней математической науки къ духу науки древнихъ индусовъ. Сказаннаго достаточно, чтобы видѣть на сколько важны математическія сочиненія индусовъ въ историческомъ отношеніи.

Въ заключеніе укажемъ на характеристическія особенности, отличающія индусскія математическія науки. Прежде всего бросается въ глаза наглядность, играющая самую важную роль въ развитіи Геометріи, пріемъ этотъ существенно отличенъ отъ метода построеній, принятаго греками, для доказательства предложеній, и сводимаго ими къ первоначальнымъ основнымъ понятіямъ. Оба метода имѣютъ свои недостатки и преимущества одинъ передъ другимъ; подобно тому какъ методъ Евклида сдѣлался свойственнымъ не одной только математикѣ древнихъ грековъ, точно также и методъ созерцательный, если можно такъ выразиться, браминовъ отразился не на одной только Геометріи индусовъ. Метафизика, Космологія и Теологія древнихъ индусовъ произошли не изъ дѣятельности мышленія, подобно философамъ грековъ, которая данное представленіе разлагала на части, сводимыя къ начальнымъ понятіямъ и собравъ которыя въ логическую и систематическую связь, старались доказать извѣстную истину. Методъ же индусовъ есть методъ чисто созерцательный, оглубленіе въ одну мысль, погруженіе въ высшія идеи, при которомъ духъ человѣка, отвлекаясь отъ всего окружающаго его міра, всѣ мысли исходящія изъ этого созерцанія, въ ихъ совокупности, старается сосредоточить на одной идеѣ. Можно указать, какъ примѣръ того, что методъ геометрической, въ совокупности приложенія, связанъ невидимыми нитями, на то, что германскій философъ Шоппенгауеръ, наиболѣе склонный къ метафизикѣ древнихъ браминовъ, былъ одинъ изъ первыхъ, возставшихъ противъ метода Евклидоваго, и, не зная метода индусовъ, предложилъ методъ, согласный съ послѣднимъ и основанный на развитіи нагляднаго представленія.

Многочисленная, хорошо обставленная, каста браминовъ, заключала въ себѣ значительное число гениальныхъ, исполненныхъ талантовъ и жаждущихъ познаній людей, которые считали своимъ назначеніемъ постоянно наблюдать природу и человѣка, полагая основу всего бытія въ созерцаніи божественныхъ началъ и види въ этомъ способъ улучшить и расширить

материальную и духовную жизнь человѣка. Исполненные широты взгляда, но часто фантастическія воззрѣнія древнихъ индусскихъ философовъ, хотя всегда глубоко и много обдуманныя, слишкомъ извѣстны, чтобы о нихъ распространяться здѣсь. Но замѣтимъ, что одинъ изъ нынѣшнихъ философовъ Германіи, думалъ найти правдивый и надлежащій отвѣтъ на всѣ вопросы человѣческой жизни и разрѣшеніе задачи о сущности всего бытія и небытія въ индусскихъ воззрѣніяхъ на Нирвану (*Nirwana*).

Не только въ философіи, но и во всѣхъ другихъ наукахъ, индусскіе ученые слѣдуютъ направленію совершенно отличному отъ направленія грековъ, и образы ихъ мышленія не сходны; они меньше обращаютъ вниманія на начало, чѣмъ на слѣдствіе, меньше на причину, чѣмъ на способъ; они больше имѣютъ дѣло съ идеями и представленіями, чѣмъ съ понятіями. Чрезъ это они многое теряютъ въ правильности и точности, за то выигрываютъ въ глубинѣ и ширинѣ взглядовъ; но мы почти всегда замѣчаемъ склонность, что эта глубина взгляда переходитъ въ неосновательность, ширина—въ нѣчто чрезвычайное, возрастающія до фантастическаго. Не даромъ Гегель называлъ „безмѣрною“ природу индусовъ; это не противорѣчитъ сказанному выше, если въ нѣкоторыхъ отрасляхъ мышленія, чуждой фантазіи, проявляется глубокомысленный, вполне трезвый умъ.

Направленіе, которому слѣдовали индусы въ наукахъ всего лучше отразилось въ ихъ Грамматикѣ. Изъ всѣхъ научныхъ произведеній древнихъ индусовъ, наиболѣе обратила на себя вниманіе всѣхъ ихъ Грамматика. Грамматика древнихъ грековъ состояла изъ строго-логическаго и строго-правильнаго синтаксиса, которому подчинялись философскіе опредѣленія языка. Индусы же напротивъ обратили свои усилія на чисто форменную, этимологическую сторону языка и съ необыкновеннымъ стараніемъ и неопостижимымъ для насъ трудомъ наблюденія эмпирически создали правила этой Грамматики; достоинство этой Грамматики, можно видѣть, изъ слѣдующихъ словъ, сказанныхъ Бенфеємъ (*Benfey*) о Грамматикѣ Панини написанной за нѣсколько вѣковъ до Р. Х.: „ни одинъ изъ языковъ всего міра не имѣетъ Грамматики, подобной санскритской. Задача, создать вполне научную Грамматику и рассмотреть всѣ формы языка съ грамматической точки зрѣнія, если и не рѣшена во всѣхъ своихъ отдѣльныхъ частяхъ, то попытка ее рѣшить удалась въ цѣломъ“.

Высоко развитой, блестящій математическій духъ древнихъ грековъ угадъ; ихъ строго-логическій, основанный на построеніи синтезъ, сдѣлалъ все возможное для изученія пространственныхъ формъ. Съ паденіемъ греческаго творчества, во главѣ математическихъ наукъ стали индусы, они сообщили имъ совершенно иное направленіе, не менѣе высокое. Направленіе это послужило къ тому, чтобы изгнать утвердившееся направленіе древнихъ

грековъ и дать первое мѣсто численнымъ отношеніямъ. Ариѳметика и Алгебра заняли первое мѣсто, Геометрія же не подвигалась впередъ; такъ продолжалось въ теченіи Среднихъ Вѣковъ, и только уже въ новѣйшее время когда стали прилагать Алгебру къ Геометріи, снова Геометрія заняла прежнее мѣсто, чему не мало способствовали новые методы, введенные въ математическія науки, какъ напр. методъ координатъ и бесконечно-малыхъ. Наравнѣ съ созерцательнымъ направленіемъ въ наукахъ, мы видимъ у индусовъ необыкновенную склонность къ отвлеченнымъ—абстрактнымъ частямъ математическихъ наукъ, на примѣръ въ ихъ Ариѳметикѣ, Алгебрѣ и Анализѣ. Направленіе это у индусовъ столь же характерно, какъ направленіе пространственныхъ форменныхъ представленій грековъ, которые были также односторонни въ своихъ взглядахъ, какъ индусы въ своихъ. Новѣйшіе европейскіе математики съумѣли оба эти направленія соединить. Безспорно направленіе греческихъ геометровъ, въ дальнѣйшемъ развитіи наукъ математическихъ, было менѣе прирождено новѣйшимъ геометрамъ, чѣмъ приложеніе отвлеченныхъ алгебраическихъ законовъ, къ такимъ геометрическимъ представленіямъ, которыя недоступны непосредственному представленію. Эллиптическіе интегралы и обратныя имъ функціи различныхъ порядковъ, пространства различныхъ измѣреній—не суть-ли это различные степени неба, въ которыхъ возсѣдаютъ индусскіе боги. У однихъ безграничная фантазія, у другихъ безграничная отвлеченность анализа,—безграничное обобщеніе символовъ. Иными словами, направленіе и методъ индусовъ ближе новѣйшимъ математикамъ, чѣмъ направленіе и методы древнихъ греческихъ геометровъ.

Другія сочиненія того же автора:

Коническія Сѣченія и новѣйшіе алгебраическіе и геометрическіе методы для изслѣдованія свойствъ кривыхъ линій. Соч. *Салмона*, переводъ съ англійскаго М. Е. Ващенко-Захарченко. С.-Петербургъ. 1860 г. ц. 2 р. 75 к.

Символическое исчисленіе и приложеніе его къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій. Кіевъ. 1862 г. ц. 1 р.

Риманнова теорія функцій составнаго переменнаго. Кіевъ. 1866 г. ц. 2 р.

Лекціи разностнаго исчисленія, читанныя въ Университетѣ Св. Владиміра. Кіевъ. 1868 г. ц. 2 р.

Теорія Определителей и теорія формъ. Лекціи читанныя въ Университетѣ Св. Владиміра. Кіевъ. 1877 г. ц. 3 р.

Начала Евклида съ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіями. Кіевъ. 1880 г. ц. 6 р.

Историческій очеркъ математической литературы Халдсея. Кіевъ. 1881 г. ц. 40 к.

Печатаются и въ непродолжительномъ времени выйдутъ:

„Краткій историческій очеркъ развитія Геометріи“

отъ самыхъ древнихъ временъ до настоящаго времени.

„Элементарная Геометрія“

въ современномъ ея состояніи.

Въ объемѣ гимназическаго курса.

Съ требованіями просить обращаться по слѣдующему адресу:
Кіевъ. Вибиковскій Бульваръ, д. № 20, Профессору Михаилу Егоровичу
Ващенко-Захарченко.

Книгопродавцамъ, взявшимъ не менѣе 10 экземпляровъ, уступка 20%.
Пересылка на счетъ покупателя.

Цѣна 1 руб.